

SUR LES FEUILLETAGES TENDUS DES 3-VARIÉTÉS FIBRÉES SUR S^1

ON TAUT FOLIATIONS ON 3- DIMENSIONAL MANIFOLDS FIBERED OVER THE CIRCLE

Dathe H^1

Résumé :

On montre par des exemples comment les feuilletages tendus transversalement affines sur les 3-variétés fermées fibrées sur S^1 peuvent être nombreux et variés. D'autre part, sous certaines hypothèses restrictives on démontre quelques théorèmes de classification de ces feuilletages.

Mots clés :

Feuilletages – 3-variétés – tendus.

Abstract:

We build some examples of taut transversely affine foliations on three closed manifolds which illustrate that how such foliations can be various. Under some hypotheses we prove some theorems which classify these foliations.

Key-words:

Foliations – three manifolds – taut.

1 - Introduction

Soit $\tilde{\alpha}$ un difféomorphisme d'*Anosov* du tore T^2 et $T_{\tilde{\alpha}}$ la 3-variété obtenue par suspension de $\tilde{\alpha}$. Ghys et Sergiescu ont montré dans [3] qu'il existe à conjugaison différentiable près, deux feuilletages de codimension 1 de classe C^1 et sans feuille compacte sur $T_{\tilde{\alpha}}$. Soit maintenant α un difféomorphisme *pseudo-Anosov* à quatre branches et dont le feuilletage stable et le feuilletage instable sont orientés d'une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$ et V la 3-variété obtenue par suspension de α , combien y a-t-il à conjugaison près, de feuilletages de codimension 1 de classe C^1 , sans feuille compacte sur V ? Il est possible comme dans le cas de $T_{\tilde{\alpha}}$ de construire deux feuilletages *modèles* ayant ces propriétés.

Nous examinons la question ci-dessus seulement pour les feuilletages transversalement affines dont l'holonomie linéaire est nulle sur la fibre de V . En général un feuilletage F *tendu* sur V possède une classe d'Euler qui, évaluée sur une fibre donne un entier appelé *nombre d'Euler* de F compris entre $2-2g$ et $2g-2$. En employant une méthode de construction classique due à Ghys-Thurston on montre que tous les entiers entre $2-2g$ et $2g-2$ sont des nombres d'Euler de feuilletage sans feuille compacte transversalement affine sur V , cela prouve déjà que, contrairement à $T_{\tilde{\alpha}}$, V porte en général beaucoup plus que deux feuilletages sans feuille compacte.

D'autre part si on considère $H^1(V, \mathbb{R})$ sur lequel α induit un isomorphisme $\tilde{\alpha}^*$, pour chaque 1-forme fermée ω dont la classe de cohomologie $[\omega]$ est un vecteur propre de $\tilde{\alpha}^*$, en généralisant une construction classique, on exhibe un feuilletage F_{ω} sur V du type ci-dessus ayant même nombre d'Euler que les modèles, dont la restriction

¹ Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences et Techniques
Université Cheikh Anta Diop de Dakar
Email : hdathe@ucad.sn

à est définie par χ , et F_χ n'est isotope à aucun des modèles. Il semble alors naturel pour classifier les feuilletages tendus de V de se donner un nombre d'Euler et de restreindre les valeurs propres de ϕ . Nakayama a montré (voir [5]) que tout feuilletage transversalement affine sans feuille compacte mais ayant au signe près le même nombre d'Euler que la fibration, et moyennant quelques hypothèses techniques convenables sur V , est isotope à un modèle d'un revêtement fini de V . Nous avons étendu ce résultat de Nakayama au cas des feuilletages sans composante de Reeb et avons établi un résultat de rigidité dans le cas où le coefficient de dilatation de ϕ est valeur propre simple de ϕ .

Je remercie G. Meigniez pour ses remarques et suggestions lors de l'élaboration de ce travail.

2-Feuilletages transversalement affines des fibrés en surfaces

Soit F un feuilletage de codimension 1 transversalement orienté sur une variété V . F sera dit *transversalement affine* s'il est défini par une 1-forme α tel que $d\alpha = \alpha \wedge \beta$ avec β une 1-forme vérifiant $d\beta = 0$. F sera dit *tendu* s'il existe une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles. En particulier si F ne possède pas de feuille compacte, il est tendu. Si par contre F possède une composante de Reeb, il n'est pas tendu. On appelle *classe d'Euler* de F la classe d'Euler habituelle du fibré tangent TF à F considéré comme fibré vectoriel orienté de rang 2.

Considérons V une 3-variété fermée fibrée sur S^1 et *cyclique* (i.e) le premier nombre de Betti de V est égal à S^1 . Si F est un feuilletage transversalement orienté de codimension 1 sur V , la classe d'Euler $\chi(TF)$ est un élément de $H^2(V, \mathbb{R})$ qui est isomorphe à \mathbb{R} . Or la classe d'homologie $[\alpha]$ de toute fibre F de V est un générateur de $H_2(V, \mathbb{R})$, donc $\chi(TF)$ est déterminée par sa valeur sur $[\alpha]$; cette valeur est appelée le *nombre d'Euler* de F . On le notera $E(F)$ dans toute la suite.

Calcul de $E(F)$ pour un feuilletage tendu F

On suppose F un feuilletage tendu de codimension 1 sur une 3-variété V fermée fibrée sur S^1 et cyclique. Soit F une fibre de V , on sait d'après ([6]) que F est isotope à une surface fermée qu'on note encore F qui est transverse à F sauf en un nombre fini de points qui sont des singularités de type selle à 4 branches pour F (on dira que F est en *position optimale* par rapport F). Une singularité s sera dite positive (resp. négative) si l'orientation du fibré tangent TF à F en s est la même (resp. opposée) que celle du fibré tangent à la fibration en s . Notons I_p la somme des indices des singularités positives et I_n la somme des indices des singularités négatives. D'après ([8]), on a :

$$I_p - I_n = E(TF) \quad (1) \text{ et}$$

$$I_p + I_n = \chi(F) \quad (2)$$

où $\chi(F)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de

La suite de cet article est l'étude des feuilletages transversalement affines tendus sur des 3-variétés fermées fibrées sur le cercle S^1 . Considérons d'abord le cas où la fibre est un tore T^2 : soit ϕ un difféomorphisme d'Anosov du tore T^2 induit par une matrice hyperbolique de \mathbb{R}^2 . Cette matrice A possède alors deux valeurs propres réelles distinctes λ et $1/\lambda$. Les feuilletages de \mathbb{R}^2 par droites de pente λ et $1/\lambda$ sont invariants par l'action de Z^2 et induisent alors sur T^2 deux feuilletages invariants par ϕ . En suspendant ces feuilletages sur la 3-variété T_ϕ obtenue par suspension de ϕ , on obtient deux feuilletages minimaux sur T_ϕ qu'on appelle les *modèles*. Ghys et Sergiescu ont montré le théorème suivant :

Théorème 1 [3] : Tout feuilletage de codimension 1, de classe $C^{r,r-2}$ et sans feuille compacte sur T_ϕ est C^{r-2} -conjugué à l'un des modèles.

Considérons maintenant une surface fermée de genre 2.

Définition 1 :

Soit ϕ : un difféomorphisme, ϕ est dit pseudo-Anosov à 4 branches s'il existe deux feuilletages F^s et F^u sur Σ vérifiant les propriétés suivantes :

i) F^s et F^u sont transversalement orientés et mesurés de mesures transverses respectives μ^s et μ^u . F^s et F^u sont singuliers avec des singularités qui sont des selles à quatre branches, ils ont le même ensemble singulier K et transverses sur $\Sigma - K$;

ii) Il existe une constante $\delta > 1$ telle que :

$$\phi_*(F^s, \mu^s) = (F^s, \delta^{-1} \mu^s)$$

$$\phi_*(F^u, \mu^u) = (F^u, \delta \mu^u)$$

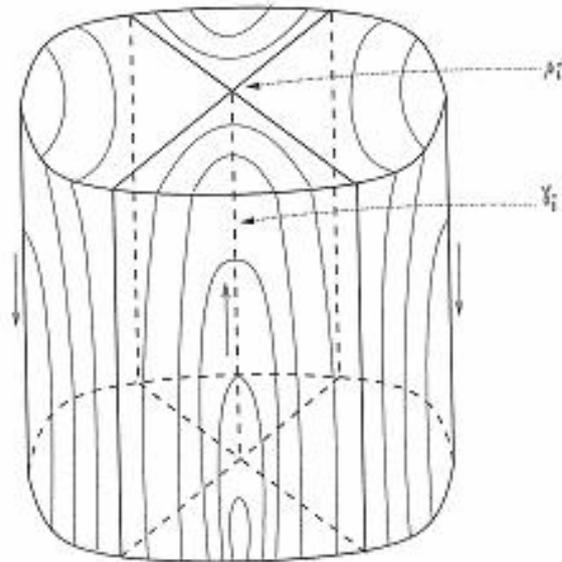
Les feuilletages F^s et F^u seront appelés respectivement le feuilletage *stable* et le feuilletage *instable* de ϕ .

Soit V un S^1 -fibré sur S^1 avec une monodromie ϕ pseudo-Anosov. Notons ω^s et ω^u les 1-formes fermées définissant respectivement le feuilletage stable et le feuilletage instable de ϕ et δ le coefficient de dilatation de ϕ . Les premiers exemples de feuilletages non singuliers sur V sont ceux qu'on obtient par suspension du feuilletage stable et du feuilletage instable de ϕ suivi d'une désingularisation. Voici cette construction :

Sur $\Sigma \times [0, 1]$, on considère la 1-forme :

$$\tilde{\omega}_\delta = \delta^{\alpha(\delta)} \omega^\delta + dt$$

avec $\delta = s$ ou $\delta = u$ et $\alpha(\delta) = 1$ si $\delta = s$ et -1 si $\delta = u$. La 1-forme $\tilde{\omega}_\delta$ définit un feuilletage H^δ sur V ayant un nombre fini de cercles de contact $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$ avec la fibration de V sur S^1 . Chaque cercle $\tilde{\alpha}_i$ possède un voisinage tubulaire V_i feuilleté comme dans la figure ci-dessous :



Découpons les V_i , on obtient une 3-variété compacte M et H^δ induit sur le bord de M quatre composantes de Reeb planes R_i^j , $j = 1, \dots, 4$, qui sont deux à deux parallèles. On remplace V_i par un voisinage U_i de $\tilde{\alpha}_i$ muni d'un feuilletage obtenu en ouvrant V_i suivant $\tilde{\alpha}_i$ et en recollant chaque feuille de R_i^j avec une feuille de la face opposée. Le feuilletage H^δ s'étend ainsi en un feuilletage transversalement affine tendu F^δ sur V . Les F^δ ont même classe d'Euler que la fibration; appelons les *modèles positifs*. De même il existe dans la classe d'Euler opposée de celle de la fibration deux *modèles négatifs*. On dira *modèle* tout court pour désigner un modèle positif ou négatif. Le théorème suivant montre qu'il existe en général des feuilletages sans feuille compacte qui sont non isotopes aux modèles sur tout fibré pseudo-Anosov.

Théorème 2 : Soit V une 3-variété fermée fibrée sur le cercle S^1 avec une monodromie pseudo-Anosov. Si les fibres de V sont de genre g , il existe au moins $2g-1$ classes d'isotopies de feuilletages transversalement affines tendus sur V .

Preuve : Soit F une fibre de V , d'après les formules 1 et 2, si F est un feuilletage tendu sur V on a : $|E(F)| = \delta(\dots)$. Nous allons montrer que pour chaque entier n vérifiant $|n| = \delta(\dots) - 2$, il y a un feuilletage

J. Sci. Technol.

transversalement affine tendu dont le nombre d'Euler est $2n$. En effet soit $\tilde{\sigma}$ la monodromie de V et F^s et F^u le feuilletage stable et le feuilletage instable de $\tilde{\sigma}$ définis par les 1-formes fermées \tilde{u}^s et \tilde{u}^u . Soit \tilde{e} le coefficient du pseudo-Anosov $\tilde{\sigma}$. Posons $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ l'ensemble singulier commun aux feuilletages F^s et F^u . Sur $\tilde{\sigma} \times \mathbb{R}$ on considère le feuilletage défini par la 1-forme $\tilde{U}_\sigma = \tilde{e}^{\tilde{\sigma}(t)} \tilde{u}^\sigma + dt$, $\tilde{\sigma}(s) = 1$ si $\sigma = s$, $\tilde{\sigma}(u) = -1$ si $\sigma = u$. Cette 1-forme définit sur V un feuilletage singulier F^σ dont l'ensemble singulier est $K = S \times \mathbb{R}/(x, t) \sim (\tilde{\sigma}(x), t+1)$. Les composantes connexes de K sont des cercles, chaque cercle possède un voisinage tubulaire V_i feuilleté comme dans la figure précédente. Dans les $(n - \#(S)) V_i$ on remplace chaque ouvert V_i par l'ouvert U_i muni du feuilletage obtenu par désingularisation du feuilletage de V_i . Puis dans les $(\#(S) - n) V_i$ on remplace chaque V_i par un ouvert U_i muni du feuilletage désingularisé comme précédemment mais avec une orientation transverse opposée. On obtient ainsi un feuilletage F non singulier et tendu sur V dont le nombre d'Euler est $2n$. Les structures transversalement affines sur $V - V_i$ et sur U_i ayant toutes de l'holonomie, elles se recollent par unicité des structures transversalement affines avec holonomie (voir [7]). Le feuilletage F est alors transversalement affine. Comme $|n| \geq 1$ et que chaque n donne au moins une classe d'isotopie de feuilletages, cela prouve le théorème.

Le théorème suivant montre que la classe d'Euler n'est pas la seule obstruction à ce qu'il ait peu de feuilletages tendus sur un fibré pseudo-Anosov. Donnons auparavant la description de la représentation d'holonomie des feuilletages transversalement affines sur certains fibrés pseudo-Anosov :

Soit donc $V \rightarrow S^1$ un fibré cyclique de fibre une surface fermée et de monodromie $\tilde{\sigma}$. On note p la fibration et p_* le morphisme induit par p sur les groupes fondamentaux. On a la suite exacte suivante au niveau des groupes fondamentaux :

$$1 \rightarrow \tilde{\delta}_1(\pi_1(V)) \rightarrow \tilde{\delta}_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Le morphisme p_* admet une section; celle-ci permet de relever le générateur $1 \in \tilde{\delta}_1(S^1)$ en un élément $t^a \in \tilde{\delta}_1(V)$. On note GA le groupe des transformations affines de \mathbb{R} préservant l'orientation. Le groupe GA est vu comme produit semi-direct de \mathbb{R} par \mathbb{R}^*_+ , ce dernier agissant sur le premier par multiplication; on a la

Proposition 1 : Soit F un feuilletage transversalement affine de codimension 1 sur V non isotope à p et $\tilde{n} : \tilde{\delta}_1(V) \rightarrow GA$ la représentation d'holonomie de F . Alors $\tilde{n} \circ i_*$ ($\tilde{\delta}_1(\pi_1(V))$) est contenu dans \mathbb{R} et $\tilde{n}(t)^a \in \mathbb{R}^*_+$. De plus la restriction de \tilde{n} à $i_*(\tilde{\delta}_1(\pi_1(V)))$ (appelée l'holonomie abélienne de F définit un vecteur propre de valeur propre réelle pour l'isomorphisme $\tilde{\sigma}_*$ induit par $\tilde{\sigma}$ sur H^1 .

Preuve : A chaque nombre réel b faisons correspondre la translation $u : x \mapsto x + b$ et soit v le morphisme qui à chaque élément $x + b$ de GA fait correspondre son rapporta. On obtient ainsi une suite exacte : $1 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow GA \rightarrow \mathbb{R}^*_+ \rightarrow 1$. Choisissons x_0 un point fixe de $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{a} \in \tilde{\delta}_1(\pi_1(V), x_0)$, on a :

$$i_* \circ \tilde{\sigma}_* (\tilde{a}) = t^{-1} \cdot (i_* \tilde{a}) \cdot t$$

Pour montrer que $\tilde{n} \circ i_*(\tilde{\delta}_1(\pi_1(V)))$ est contenu dans \mathbb{R} , il suffit de montrer que :

$$v \circ \tilde{n} \circ i_*(\tilde{a}) = 1 \text{ i.e. } \text{Log. } v \circ \tilde{n} \circ i_*(\tilde{a}) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \text{Log. } v \circ \tilde{n} \circ i_* \circ \tilde{\sigma}_* (\tilde{a}) &= \\ \text{Log. } v[\tilde{n}(t^1) \cdot \tilde{n}(i_* \tilde{a}) \cdot \tilde{n}(t)] &= \\ \text{Log. } v \circ \tilde{n} \circ i_*(\tilde{a}) & \end{aligned}$$

Donc si $[\text{Log. } v \circ \tilde{n} \circ i_*]$ est l'élément de H^1 donné par

$\text{Log. } v \circ \tilde{n} \circ i_*$ alors $[\text{Log. } v \circ \tilde{n} \circ i_*]$ est un point fixe de l'isomorphisme $\tilde{\sigma}_*$. Comme V est cyclique,

$$[\text{Log. } v \circ \tilde{n} \circ i_*] = 0,$$

ce qui entraîne que :

$$v \circ \tilde{n} \circ i_* = 1.$$

D'autre part $\tilde{n}(t) \in \mathbb{R}^*_+$ sinon F est défini par une 1-forme fermée non singulière et est alors isotope à la fibration de V sur S^1 (voir [4]), ce qui est impossible.

On a le :

Théorème 3 : Soit V une 3-variété fermée et $\tilde{\delta} : V \rightarrow S^1$ un fibration de V de monodromie $\tilde{\delta}$. On suppose V cyclique. Soit $\tilde{\delta}_*$ l'action de $\tilde{\delta}$ en homologie. Soit \tilde{u} une 1-forme dont la classe de cohomologie est un vecteur propre non nul de $\tilde{\delta}_*$, alors il existe un feuilletage $F_{\tilde{u}}$ sur V ayant les propriétés suivantes :

- i) $F_{\tilde{u}}$ est transversalement affine et a même classe d'Euler que la fibration $\tilde{\delta}$. La restriction de $F_{\tilde{u}}$ à une fibre de V est définie par \tilde{u} . Et $F_{\tilde{u}}$ est une perturbation de $\tilde{\delta}$.
- ii) $F_{\tilde{u}}$ est isotope à $F_{\tilde{u}'}$ si et seulement si les classes de cohomologie de Rham de \tilde{u} et \tilde{u}' sont positivement colinéaires. Les $F_{\tilde{u}}$ sont, à isotopie près, les seuls feuilletages transversalement affines qui sont des perturbations de $\tilde{\delta}$.

Preuve : i) Soit \tilde{u} une fibre de V , $\tilde{\delta} : \tilde{u} \rightarrow S^1$ le difféomorphisme de monodromie et $\tilde{\delta}_*$ l'action de $\tilde{\delta}$ en homologie. Soit \tilde{u} une 1-forme fermée à singularités selles dont la classe de cohomologie absolue $[\tilde{u}]$ est un vecteur propre pour $\tilde{\delta}_*$ de valeur propre μ , on a :

$$\tilde{\delta}_*[\tilde{u}] = \mu[\tilde{u}]$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$\mu \tilde{u} = \tilde{\delta}_* \tilde{u} + df$$

Posons :

$$\tilde{u}_t = \mu(1-t)\tilde{u} + t \tilde{\delta}_* \tilde{u}$$

On a : $\tilde{u}_0 = \mu \tilde{u}$ et $\tilde{u}_1 = \tilde{\delta}_* \tilde{u}$.

Soit \tilde{U} la 1-forme sur $\tilde{u} \times [0, 1]$ définie par : $\tilde{U}_{(x,y,t)} = \tilde{u}_t(x,y) + (f(x,y) + C)dt$, où C est une constante positive suffisamment grande. La 1-forme \tilde{U} est alors non singulière et induit sur les bords de $\tilde{u} \times [0, 1]$ les formes $\mu \tilde{u}$ et $\tilde{\delta}_* \tilde{u}$; de plus $d\tilde{U} = 0$ et donc \tilde{U} définit un feuilletage transversalement affine $F_{\tilde{u}}$ sur V en recollant les bords de $\tilde{u} \times [0, 1]$ par $\tilde{\delta}$.

L'orientation transverse de $F_{\tilde{u}}$ est donnée par l'orientation positive de \tilde{U} et aux singularités de \tilde{U} cette orientation est la même que celle de la fibration. Donc toutes les singularités de \tilde{U} sont positives. On a alors conformément aux notations précédentes,

$$\chi(T F_{\tilde{u}}) = 2g - 2$$

Le feuilletage $F_{\tilde{u}}$ a alors même classe d'Euler que la fibration. De plus $F_{\tilde{u}}$ est une perturbation de la fibration de V sur S^1 , en effet la famille à un paramètre de feuilletages F_m définie par les 1-formes $\tilde{U}^m_{(x,y,t)} = m \tilde{u}_t(x,y) + (f(x,y) + C)dt$ vérifie $F_0 = \tilde{\delta}$ et pour tout $m > 0$, F_m est isotope à $F_{\tilde{u}}$.

ii) Supposons que \tilde{u}' soit une 1-forme dont la classe de cohomologie absolue est positivement colinéaire à celle de \tilde{u} , alors les représentations d'holonomie \tilde{n} et \tilde{n}' de $F_{\tilde{u}}$ et $F_{\tilde{u}'}$ sont conjuguées dans GA d'après la proposition ci-dessus et comme $F_{\tilde{u}}$ et $F_{\tilde{u}'}$ sont des perturbations de la fibration, ils sont isotopes. Réciproquement si $F_{\tilde{u}}$ et $F_{\tilde{u}'}$ sont isotopes, \tilde{n} et \tilde{n}' sont conjugués dans GA et donc \tilde{u} et \tilde{u}' sont positivement colinéaires.

Si F est un feuilletage transversalement affine suffisamment proche de la fibration, l'holonomie abélienne de F est un vecteur propre v non nul mais suffisamment proche de 0 car pour la fibration l'holonomie abélienne est nulle. Nous construisons comme dans i) un feuilletage transversalement affine F' qui est une perturbation de la fibration et de même

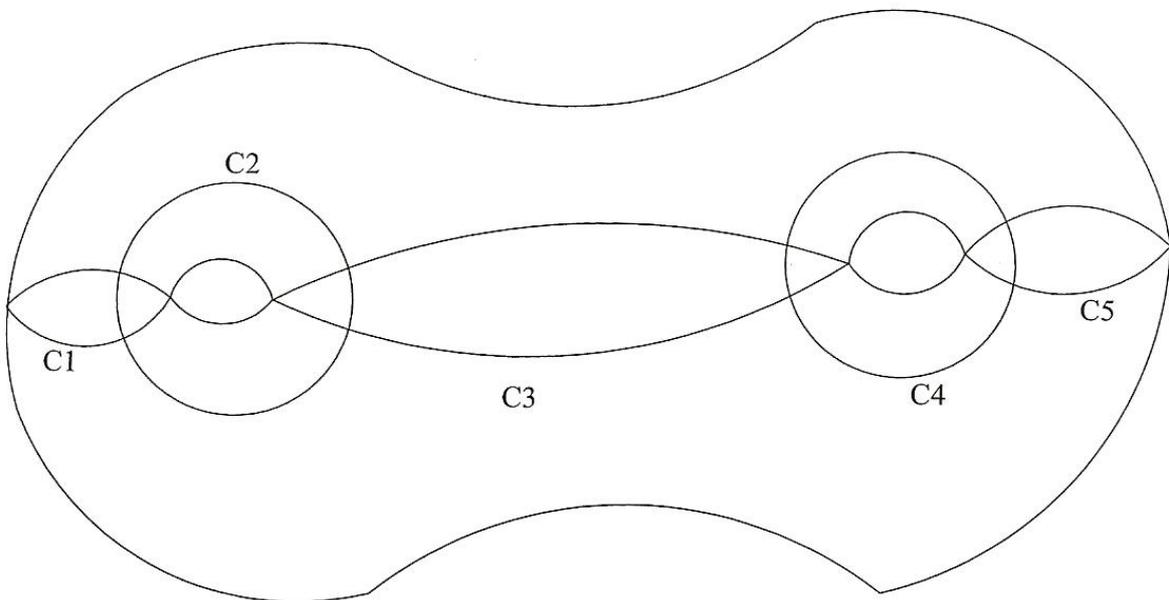
représentation d'holonomie que F à conjugaison près. Donc F et F' sont isotopes.

Nous en déduisons le :

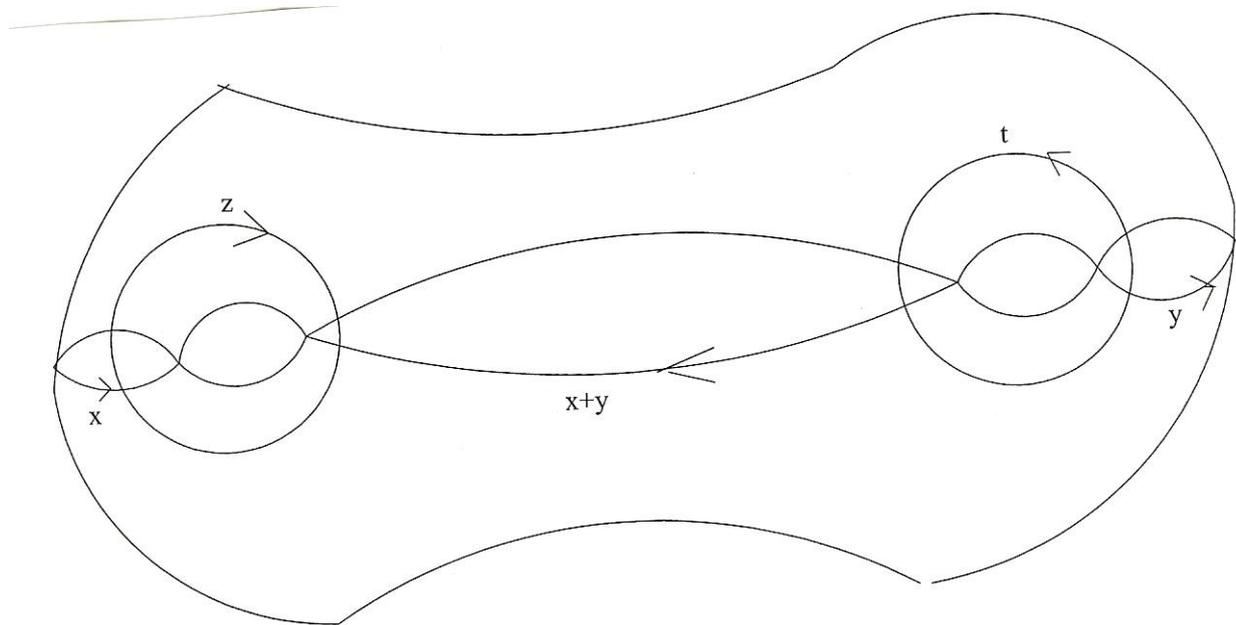
Corollaire 1 : Soit V un fibré pseudo-Anosov cyclique. Soit λ le coefficient de dilatation de la monodromie ϕ de V . Si la matrice induite par ϕ en homologie possède une valeur propre réelle distincte de λ et $1/\lambda$, il existe sur V un feuilletage tendu transversalement affine dans la classe d'Euler de la fibration et qui n'est conjugué ni à un modèle ni à la fibration.

Exemple : Nous construisons un exemple de fibré pseudo-Anosov qui satisfait les hypothèses du corollaire précédent. Soit S la surface fermée de genre 2, on considère les courbes C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 de S comme indiqué sur la figure ci-dessous :

Preuve : En effet dans la situation i) du théorème précédent si le vecteur propre v n'est ni dans la classe de cohomologie du feuilletage stable ni dans celle du feuilletage instable, le feuilletage F obtenu a une représentation d'holonomie non conjuguée à celle d'un modèle. Le feuilletage F n'est alors isotope à aucun des modèles et n'est aussi pas isotope à une fibration. Comme F est une perturbation d'une fibration, il est tendu.



Soit T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 les twists de Dehn respectifs le long des courbes C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 . Le difféomorphisme $\delta = T_1 T_3 (T_5)^2 (T_2)^{-1} (T_4)^{-1}$ est pseudo-Anosov. En effet considérons le système générateur de H_1 donné par les courbes dessinées ci-dessous :



La matrice de l'isomorphisme δ_* induit par δ sur H_1 relativement à cette base est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $t^4 - 9t^3 + 21t^2 - 9t + 1$. L'isomorphisme possède quatre valeurs propres réelles distinctes $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ et \tilde{e}_4 . Le polynôme caractéristique ne possède pas de zéro qui soit racine de l'unité, il est irréductible sur \mathbb{Z} et n'est pas un polynôme en t^n ($n > 1$) donc d'après ([1] Lemme 5.1, page 75-76) δ est un difféomorphisme pseudo-Anosov. Si le feuilletage stable et le feuilletage instable de δ sont orientables, la 3-variété obtenue par suspension de δ est un fibré pseudo-Anosov qui satisfait les conditions du corollaire. Sinon on considère le revêtement $p : \tilde{V} \rightarrow V$ ramifié à deux feuillets qui rend le feuilletage stable ou

instable orientable. Ce revêtement est ramifié en deux points et donc \tilde{V} est la surface fermée de genre 4. Le relèvement de δ par p donne un difféomorphisme pseudo-Anosov $\tilde{\delta}$ de \tilde{V} ayant les mêmes propriétés locales que δ (voir [2] exposé 13). L'isomorphisme $\tilde{\delta}_*$ induit par $\tilde{\delta}$ en homologie possède donc $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ et \tilde{e}_4 comme seules valeurs propres réelles. La suspension de $\tilde{\delta}$ donne alors un fibré pseudo-Anosov qui convient. Nakayama a montré le :

Théorème 4 [5] : Soit V une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$ et $\delta : V \rightarrow V$ un \mathbb{Z} -fibré pseudo-Anosov. On suppose que la matrice de monodromie possède deux valeurs propres réelles \tilde{e} et $1/\tilde{e}$ avec des sous-espaces propres associés de dimension 1, où \tilde{e} est le coefficient de dilatation de la monodromie. Soit F un feuilletage de codimension 1 sans feuille compacte vérifiant : $\delta_*(TF) = \pm \tilde{e} (T\delta)$; $\delta_*(TF) = \pm (T\delta)$ désignent les classes d'Euler de F et δ respectivement. Alors il existe un

revêtement fini de F qui est C^0 -isotope à l'un des modèles.

Nous étendons ce théorème de la manière suivante :

Théorème 5 : Soit V une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$ et $\delta : V \rightarrow S^1$ un \mathbb{R} -fibré pseudo-Anosov. On suppose que la matrice de monodromie possède deux valeurs propres réelles $\tilde{\epsilon}$ et $1/\tilde{\epsilon}$ avec des sous-espaces propres associés de dimension 1, où $\tilde{\epsilon} > 1$ est le coefficient de dilatation de la monodromie. Soit F un feuilletage transversalement affine de codimension 1 sans composante de Reeb vérifiant $\pm(TF) = \pm(T\delta)$; $\pm(TF)$ et $\pm(T\delta)$ désignent les classes d'Euler de F et δ respectivement. Alors on a une des deux situations suivantes :

- i) Le feuilletage F est isotope à la fibration δ
- ii) Il existe un revêtement fini de F qui est C^0 -isotope à l'un des modèles d'un revêtement fini de V .

Preuve : Soit σ_0 une fibre de V , $\tilde{\sigma} : \sigma_0 \rightarrow \sigma_0$ le difféomorphisme de monodromie de V et \tilde{u}^s et \tilde{u}^u les 1-formes définissant le feuilletage stable et le feuilletage instable de $\tilde{\sigma}$. On sait (voir [6]) que σ_0 est isotope à une surface fermée encore notée σ_0 telle que si σ_0 n'est pas tangente à F alors σ_0 est en position optimale par rapport à F . Examinons alors les deux cas :

- 1- La fibre σ_0 est tangente à F . Alors le feuilletage obtenu en relevant F sur $\sigma_0 \times [0, 1]$ est défini par une 1-forme fermée non singulière tangente au bord (voir proposition ci-dessus), donc une fibration sur $[0, 1]$, F est alors une fibration sur S^1 . Comme $b_1V = 1$, F est isotope à δ ([2]).
- 2- La fibre σ_0 est en position optimale par rapport à F . En relevant F sur $\sigma_0 \times [0, 1]$ on obtient un feuilletage F défini par une 1-forme fermée \tilde{U} (voir proposition ci-dessus) qui induit sur $\sigma_0 \times \{0\}$ une 1-

forme fermée singulière \tilde{U}_0 avec des singularités qui sont toutes des selles à 4 branches. Soit v l'élément de $H^1 \sigma_0$ défini par l'holonomie abélienne de F ; v est un vecteur propre de l'isomorphisme $\tilde{\sigma}_*$ induit par $\tilde{\sigma}$ (voir proposition ci-dessus) et comme F n'a pas de singularité de type centre sur σ_0 , la forme \tilde{U}_0 n'est pas exacte et v est alors non nul. Le vecteur propre v appartient alors à l'un des sous-espaces propres associés à $\tilde{\epsilon}$ ou $1/\tilde{\epsilon}$ car sinon $\tilde{\sigma}_*$ possède une valeur propre réelle distincte de $\tilde{\epsilon}$ et $1/\tilde{\epsilon}$ ce qui est impossible. Donc v est colinéaire à \tilde{u}^s ou \tilde{u}^u puisque les sous-espaces propres associés à $\tilde{\epsilon}$ et $1/\tilde{\epsilon}$ sont de dimension 1. La représentation d'holonomie de F est alors conjuguée à celle de l'une des modèles. On applique alors les théorèmes 2 et 3 de Nakayama (voir [5]) pour obtenir ii).

Le théorème suivant exprime une rigidité des modèles dans l'espace des feuilletages transversalement affinis.

Théorème 6 : Soit V un fibré pseudo-Anosov cyclique de monodromie $\tilde{\sigma}$, de coefficient de dilatation $\tilde{\epsilon}$. Si $\tilde{\epsilon}$ et $1/\tilde{\epsilon}$ sont des valeurs propres simples de l'isomorphisme induit par $\tilde{\sigma}$ en homologie, tout feuilletage transversalement affine de V suffisamment proche d'un modèle est conjugué à ce modèle.

Preuve : Soit F un feuilletage transversalement affine proche du modèle instable, alors la représentation d'holonomie H de F est proche de celle du modèle instable et d'après ce qui précède l'holonomie linéaire est un multiple de la représentation évidente à valeurs dans \mathbb{Z} et l'holonomie abélienne est un vecteur propre de valeur propre réelle μ de $\tilde{\sigma}_*$, où $\tilde{\sigma}_*$ est l'isomorphisme induit par $\tilde{\sigma}$ en homologie. Le réel μ est proche du coefficient $\tilde{\epsilon}$ de $\tilde{\sigma}$, donc $\mu = \tilde{\epsilon}$. Soit σ_0 une fibre de V et \tilde{u}^u le feuilletage instable de $\tilde{\sigma}$. Comme $\tilde{\epsilon}$ est simple l'élément de $H^1 \sigma_0$ défini par l'holonomie abélienne de F est proportionne

là la classe $[u]$ de u , H est alors conjuguée dans GA au morphisme d'holonomie du modèle instable et F est alors conjugué au modèle instable. On montre de même que si F est suffisamment proche du modèle stable, alors il est conjugué à ce modèle. •

Références

[1]- Casson, A., Bleiler, S. Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston, Lond. Math. Soc. Student Texts (1993).

[2]- Fatihi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V. Travaux de Thurston sur les surfaces, S.M.F, astérisque 66-67 (1979).

[3]- Ghys, E., Sergiescu, V. Stabilité et Conjugaison différentiable pour certains feuilletages, Topology 19, (1980).

[4]- Laudenbach, F., Blank, S. Sur l'isotopie des formes fermées en dimension 3, Invent. Math. 54, (1979), 103-177.

[5]- Nakayama, H. Transversely affine foliations on some surfaces bundles over S^1 pseudo-Anosov type, Ann. Inst. Fourier, 41 (1991).

[6]- Roussarie, R. Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie, Publ. Math. IHES 43 (1974), 101-141.

[7]- Seke, B. Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension 1, Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 1-29.

[8]- Thurston, W. Norm on the homology of 3-manifolds, Memoirs of the A.M.S, 339 (1986), 99-130.

