

## IMPORTANCE DE LA RECHERCHE FONDAMENTALE

Hamidou Dathe<sup>1</sup>

Il est sans aucun doute que les théories mathématiques sont un instrument irremplaçable de formation à la rigueur et au raisonnement, elles développent l'intuition, l'imagination et l'esprit critique. Les mathématiques se nourrissent de leurs liens avec les autres disciplines et avec le monde réel, même si après les méthodes peuvent en être très loin, moment où justement la discipline a cette capacité de se nourrir d'elle-même : Les théories mathématiques ont cette extraordinaire atout de ne pas se détruire entre elles, elles se construisent les unes sur les autres.

Même si bon nombre de mathématiciens sont intéressés par le côté esthétique et intellectuel de leur discipline avant tout, les applications surgissent de manière souvent inattendue. Nous allons donner quelques exemples de théories mathématiques à priori désintéressées mais qui ont eu par la suite des applications considérables.

Trouver un grand nombre  $N$  qui est produit d'entiers premiers est un problème purement algébrique, mais dont on sait aujourd'hui qu'il régit le problème du codage utilisé dans les banques.

La théorie des groupes fondés au dix neuvième siècle a joué un rôle capital dans la découverte de l'existence de certaines symétries dans l'étude des particules en physique quantique. C'est grâce à la théorie des groupes que les physiciens ont pu s'assurer de l'existence de certaines particules bien avant leurs découvertes expérimentales. Le cadre d'étude de la mécanique quantique est justement ces ensembles dont les éléments pouvaient être des fonctions satisfaisant certaines propriétés, ce que les mathématiciens ont étudié sous le nom d'espace de Hilbert au

début du vingtième siècle. Le naturel problème des déformations a toujours passionné les mathématiciens. Un objet en mathématique qui ne se déforme sans violence est dit rigide. Comment reconnaître qu'un tel ou tel objet est rigide ou de façon générale quelles ont les propriétés d'un ensemble donné qui sont invariantes par les déformations, c'est donc là la topologie des ensembles qui ultérieurement a donné naissance à la théorie des nœuds, c'est-à-dire des plongements de cercles dans la sphère de dimension trois. On a découvert quelques années après avec James Wang, biochimiste américain, que les molécules d'ADN sont entortillées comme des nœuds et cette théorie des nœuds est aujourd'hui à la base de la biomathématique qui est l'utilisation des outils mathématiques en biologie.

La physique a connu un développement spectaculaire avec le calcul intégral, la relativité d'Einstein repose sur la géométrie non euclidienne quant personne n'imaginait que l'étude du demi-plan de Poincaré ou de son disque pouvait un jour servir à quelque chose.

La théorie des cordes développée aujourd'hui par des mathématiciens comme Maxim Kontsevitch devrait aider dans un futur relativement proche à comprendre la physique des trous noirs et les effondrements des étoiles sur elles mêmes.

Aujourd'hui encore plus que jamais les mathématiciens-physiciens sont convaincus qu'une théorie quantique de la gravitation passe nécessairement par le développement d'une géométrie quantique. On peut conclure comme disait Galilé : le monde est écrit en langage mathématique.

<sup>1</sup>Département de Mathématiques-Informatique.

Faculté des Sciences et Techniques, UCAD, Dakar.

## UN REGARD NON EUCLIDIEN POSE SUR LES NOMBRES

Françoise Dal'Bo<sup>1</sup>

*A mes collègues sénégalais engagés dans la recherche, dont l'activité aussi abstraite soit-elle, éclaire l'avenir de leur pays*

Nombres et géométrie ont toujours été intimement liés. Pendant des siècles, ce lien s'est construit autour de figures du plan euclidien. Pensons par exemple à la théorie des proportions d'Euclide, à la découverte du nombre  $\sqrt{2}$  comme rapport, dans un carré, entre la longueur d'une diagonale et d'un côté, ou encore au nombre  $\pi$  comme rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Aujourd'hui, ce lien s'est enrichi d'objets géométriques de nature dynamique. A l'origine de ce nouveau regard posé sur les nombres, on peut citer E. Artin (1898 – 1962) qui relia le comportement de trajectoires sur une surface à des propriétés arithmétiques des nombres. Cette nouvelle approche s'est pleinement développée à la fin du XXI<sup>ème</sup> siècle à l'initiative du célèbre mathématicien G. Margulis, qui l'utilisa pour résoudre une importante conjecture d'arithmétique formulée par A. Oppenheim (1903-1997). La démonstration de G. Margulis a été le point de départ d'une véritable école de mathématiciens répartis dans le monde entier, qui travaillent aujourd'hui activement sur le comportement de trajectoires sur des espaces non euclidiens avec en ligne de mire la résolution de conjectures de théorie des nombres. L'une des conjectures visées, énoncée dans les années 1930 par J.E Littelwood (1885–1977), affirme qu'étant donnés deux nombres  $a$  et  $b$ , il existe une infinité d'entiers  $p, q, t$  tels que la quantité  $q^2(a - p/q)(b - r/q)$  soit aussi proche de zéro que l'on veut.

Le but de ce texte est de mettre en lumière dans un cadre élémentaire, cette passerelle

entre la théorie des nombres et la « géométrie dynamique ». Nous ne donnerons aucune démonstration, le lecteur souhaitant plus de détails pourra se reporter au mémoire de Master Recherche de Cheikh Lo « Pavages hyperboliques et développement en fractions continues », soutenu à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar en février 2010.

### **Développement en fractions continues.**

De tout temps les mathématiciens ont cherché des méthodes leur permettant d'approcher un nombre par des valeurs rationnelles. Cette recherche s'est fortement développée à partir du XVIII<sup>ème</sup> siècle pour devenir aujourd'hui une branche féconde de l'arithmétique, la théorie de l'approximation diophantienne, dont les prémices se trouvent déjà dans les travaux de Diophante d'Alexandrie. La principale motivation dans ce domaine est de limiter l'erreur commise entre un nombre irrationnel et ses valeurs approchées. Il existe différentes méthodes permettant d'approcher un nombre  $x$  par des rationnels. L'une des plus familières est certainement le développement décimal qui repose sur un algorithme simple conduisant à une écriture de  $x$  au moyen de termes de la forme  $a_k/10^k$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ .

La méthode privilégiée en théorie de l'approximation diophantienne est celle du développement en fractions continues. C'est elle par exemple que J. Dirichlet (1805–1859) utilisa pour démontrer qu'étant donné un irrationnel  $x$ , il existe une infinité de rationnels  $p/q$  dont la

distance à  $x$  est inférieure à  $1/2q^2$ . Le développement en fractions continues trouve son origine dans un algorithme d'Euclide permettant de calculer le plus grand diviseur commun entre deux nombres, en voici une présentation.

Si  $x$  est un nombre positif, il est compris entre deux entiers naturels consécutifs. Le plus petit de ces entiers  $n_0$  est la partie entière de  $x$ . Choisissons-le comme première approximation de  $x$ . On peut alors écrire  $x = n_0 + N_0$ , où  $N_0$  est un nombre compris entre 0 et 1. Si ce nombre est nul, on s'arrête. Sinon, on choisit d'approcher  $1/N_0$ , qui est supérieur à 1, par sa partie entière  $n_1$ , et on a  $x = n_0 + 1/(n_1 + N_1)$ , où  $N_1$  est compris entre 0 et 1. Si  $N_1$  n'est pas nul, on recommence en remplaçant  $N_0$  par  $N_1$ .

On obtient  $x = n_0 + 1/(n_1 + 1/(n_2 + N_2))$ , où  $N_2$  est la partie entière de  $N_1$ , et  $N_2$  est compris entre 0 et 1. Ce processus se termine si à une étape, le nombre  $N_k$  produit par cet algorithme, est nul. Il se poursuit indéfiniment sinon, et dans ce cas aucun des entiers  $n_i$  n'est nul. On peut considérer la suite  $n_0, n_1, n_2, \dots$  de ces entiers naturels non nuls comme un codage des nombres. Dans ce modèle, les suites finies représentent les rationnels. Quant aux suites infinies périodiques à partir d'un certain rang, elles correspondent aux nombres quadratiques, solutions d'un polynôme à coefficients entiers de degré 2 comme par exemple  $\sqrt{2}$ , ou encore comme le nombre d'or  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  qui satisfait l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$ . Dans ce codage, le nombre d'or est d'ailleurs le plus simple des irrationnels dans la mesure où tous les termes de la suite  $n_0, n_1, n_2, \dots$  sont égaux à 1. Pour obtenir des valeurs approchées du nombre  $x$ , il faut s'intéresser à la suite  $p_i/q_i = n_0 + 1/(n_1 + 1/(n_2 + \dots 1/n_i))$ . Ces rationnels s'approchent de  $x$  avec une excellente précision. Par exemple si  $x$  est rationnel, la suite  $p_i/q_i$  est finie, contrairement à la suite des valeurs

approchées (lorsque  $x$  n'est pas décimal) fournie par le développement décimal.

Dans la suite de ce texte nous donnons une interprétation géométrique du développement en fractions continues d'un nombre, mettant en jeu un pavage d'un plan non euclidien.

### **Le demi-plan de Poincaré et ses étoiles, les réels.**

La géométrie, étymologiquement science qui mesure la Terre, telle qu'elle a été définie dans les éléments d'Euclide, a longtemps été considérée comme l'unique géométrie. Pendant deux millénaires, des mathématiciens ont entrepris de déduire, à partir des quatre premiers postulats énoncés dans ce traité, le cinquième selon lequel dans le plan par un point extérieur à une droite donnée  $\Delta$ , il passe une unique droite ne rencontrant pas  $\Delta$ .

Il a fallu attendre les années 1830, avec les travaux de N. Lobatchevski, de J. Bolyai et de C.F Gauss, pour mettre fin à cette entreprise et pour qu'apparaissent, aux côtés du plan euclidien, des géométries contredisant le postulat des parallèles d'Euclide. Mais c'est à partir de la fin du XXIIème siècle, grâce à H. Poincaré, que le premier exemple non borné de ces géométries, dites non-euclidiennes, connu aujourd'hui sous le nom de demi-plan de Poincaré, se simplifie et passe du statut de curiosité à celui d'outil puissant notamment en théorie des nombres. Le paragraphe qui suit est une présentation de cet exemple.

La construction du demi-plan de Poincaré, telle que ce dernier l'a conçue, s'appuie sur le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, identifié au plan complexe  $\mathbb{C}$ . La partie du plan qu'elle prend en compte est le demi-plan

$$H = \{z \in \mathbb{C} ; \text{Im}(z) > 0\}.$$

On remarque que ce demi-plan est laissé invariant par les trois fonctions complexes suivantes :

$$h_\alpha(z) = az \text{ avec } a > 0$$

$$t_\beta(z) = z + \beta \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}$$

$$s(z) = \frac{-1}{z}$$

Ces fonctions engendrent le groupe  $H$  des homographies réelles défini par

$$H = \left\{ \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R} \text{ avec } ad - bc = 1 \right\}$$

Par construction, pour tous  $g \in H$  et  $z \in H$ , on a  $g(z) \in H$ . Le groupe  $H$  permet donc de déplacer les points de  $H$ . Par ailleurs on montre que les propriétés suivantes sont satisfaites :

**Propriété** Soient  $z$  et  $z'$  dans  $H$  :

- (i) Il existe  $g \in H$ , tel que  $g(z) = z'$ .
- (ii) Il existe  $g \in H$ , tel que  $g(z) = i$ ,  $Re(g(z')) = 0$  et  $Im(g(z')) > 1$ .

En s'appuyant sur ces propriétés d'homogénéité, on construit sur  $H$  une distance  $d$ , à partir des deux contraintes suivantes :

- pour tout  $t > 0$ ,  $d(i, it) = |\ln(t)|$   $t > 0$ ,
- pour tous  $z \neq z'$  dans  $H$ ,  $d(z, z') = d(g(z), g(z'))$ , où  $g$  est l'unique élément du groupe  $H$  tel que,  $Re(g(z')) = 0$  et  $(g(z')) > 1$ .

Une telle application  $g$  de  $H \times H$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifie :

- (i)  $d(z, z') = 0$  si et seulement si  $z = z'$ .
- (ii)  $d(z, z') = d(z', z)$ .
- (iii)  $d(z, z') \leq d(z, z'') + d(z'', z')$ .
- (iv)  $d(g(z), g(z')) = d(z, z')$  pour tout  $g \in H$ .
- (v)

Elle est appelée distance hyperbolique. Par construction, les transformations de  $H$  sont des isométries de l'espace métrique  $(H, d)$ . La distance  $d$  est reliée à la distance euclidienne par la relation suivante:

$$sh\left(\frac{d(z, z')}{2}\right) = \frac{|z - z'|}{2(Imz)^{\frac{1}{2}}(Imz')^{\frac{1}{2}}}$$

Où  $sh(x)$  est la fonction sinus hyperbolique

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

En utilisant un développement limité de cette expression, on obtient une estimation de  $d(z, z')$ , avec  $z$  proche de  $z'$  :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{d(z, z+u)Imz}{|u|} = 1$$

Cette expression infinitésimale nous permet de construire dans  $H$  une notion de longueur hyperbolique  $L_H(c)$ , associée à une courbe  $c$  de  $H$ .

Soit  $c: [a, b] \rightarrow H$  une courbe  $C^1$ , on pose  $L_H(c) = \int_a^b \frac{|c'(t)|}{Imc(t)} dt$

Si  $g$  est de la forme  $t_\alpha, t_\beta$  ou  $s$ , on montre facilement l'égalité  $L_H(g(c)) = L_H(c)$ . On en déduit que les transformations du groupe  $H$  préservent la longueur hyperbolique des courbes.

Par analogie avec la géométrie euclidienne, on peut se demander si, étant donnés deux points  $z \neq z'$  de  $H$ , il existe une courbe de  $H$  reliant  $z$  à  $z'$  de longueur hyperbolique minimale. Dans le cadre euclidien on sait qu'une telle courbe existe et est précisément le segment de droite entre  $z$  et  $z'$ . Dans  $H$ , la réponse est également positive :

**Théorème** Soient  $z$  et  $z' \in H$ . Notons  $S$  l'ensemble des courbes  $C^1$  de  $H$  reliant  $z$  à  $z'$ , il existe une unique courbe  $c \in S$  telle que

$$L_H(c) = \inf_{c \in S} L_H(c)$$

Si  $Re(z) = Re(z')$ , la courbe  $c$  est le segment euclidien vertical  $[z, z']$ .

Sinon,  $z$  et  $z'$  appartiennent à un unique demi-cercle inclus dans  $H$  dont le diamètre est un segment de l'axe réel, et la courbe  $c$  est l'arc supporté par ce demi-cercle d'extrémités  $z$  et  $z'$ .

La courbe  $c$  est appelée segment géodésique, c'est le chemin le plus court, au sens hyperbolique, pour aller de  $z$  à  $z'$ . Comme dans le plan euclidien, sa longueur

hyperbolique est égale à la distance  $d(z, z')$ .

Dans  $(\mathbf{H}, d, L_{\mathbf{H}})$ , les demi-droites verticales et les demi-cercles dont le diamètre est un segment de l'axe réel, sont donc l'analogue des droites du plan euclidien. Ces courbes sont appelées géodésiques. La propriété suivante exprime le fait que le demi-plan de Poincaré muni de la distance  $d$  et de la longueur  $L_{\mathbf{H}}$ , ne vérifie pas l'axiome d'Euclide.

**Propriété** Soient  $z$  un point de  $\mathbf{H}$  et  $c$  une géodésique ne passant pas par  $z$ , il existe une infinité de géodésiques ne rencontrant pas  $c$  et passant par  $z$ .

Dans cette géométrie, on constate qu'un sous-ensemble  $A \subset \mathbf{H}$  n'est pas borné dans  $(\mathbf{H}, d)$  si et seulement si, ou bien il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  qui converge vers un réel, ou bien  $A$  n'est pas borné au sens euclidien. Un point en mouvement  $z'$  s'éloigne donc indéfiniment d'un point fixe  $z$ , s'il s'en éloigne au sens euclidien ou alors s'il s'approche de la droite des réels. Contrairement aux apparences (euclidiennes) un habitant de ce nouveau monde n'atteint donc jamais la droite des réels qui fait partie de son horizon, ou encore du bord à l'infini de  $\mathbf{H}$ . Autrement dit, les nombres réels sont les étoiles du demi-plan de Poincaré.

**Pavage et développement en fractions continues.**

Paver un espace géométrique consiste à recouvrir cet espace par des motifs répétifs, sans trous, ni chevauchements. Le pavage est dit périodique s'il est obtenu en déplaçant le motif par un groupe de transformations.

Dans le plan euclidien, le pavage périodique le plus banal est celui obtenu en déplaçant un carré de côté unité par le groupe des translations entières

$$\{t(z) = z + p + iq; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$$

Dans ce paragraphe nous présentons un pavage périodique de  $\mathbf{H}$  mettant en jeu le sous-groupe  $\text{HZ}$  de  $\mathbf{H}$  défini par

$$\text{HZ} = \left\{ \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{Z} \text{ avec } ad - bc = 1 \right\}$$

Remarquons que les transformations  $t(z) = z + 1$  et  $s(z) = \frac{1}{-z}$  appartiennent à  $\text{HZ}$ .

Introduisons l'ensemble :

$$D = \left\{ z \in \mathbf{H}; |z| \geq 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

On montre que cet ensemble joue le rôle de pavé au sens où il vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\bigcup_{g \in \text{HZ}} gD = \mathbf{H}$ ,
- (ii) Si  $gD$ , avec  $g \in \text{HZ}$  rencontre  $D$  en un point de l'intérieur de  $D$ , alors  $g = \text{Id}$ .

Ce pavage de  $\mathbf{H}$  obtenu au moyen de  $D$  et du groupe  $\text{HZ}$  est un outil essentiel pour établir un lien entre la théorie des nombres et la géométrie du demi-plan de Poincaré. Il permet par exemple de lire le caractère rationnel d'un réel  $x$ . Pour cela, on "remplace"  $x$  par la demi-géodésique  $[i, x]_{\mathbf{H}}$  d'origine  $i$  et d'extrémité  $x$  (qui est un arc de cercle), on a alors la caractérisation suivante :

**Théorème** Un réel  $x$  est rationnel si et seulement si la demi- géodésique  $[i, x]_{\mathbf{H}}$  ne rencontre qu'un nombre fini de domaines  $g(D)$ , avec  $g \in \text{HZ}$ .

Le développement en fractions continues d'un réel  $x$  se lit également dans  $\mathbf{H}$  au moyen d'un pavage, construit à partir des domaines  $g(D)$ , mis en évidence au début du XIXème siècle, et attribué à J. Farey (1766–1826). C'est certainement pour cette raison que ce pavage porte le nom de pavage de Farey, bien que la contribution du mystérieux géologue soit très lointaine.

Le pavé initial du pavage de Farey est le triangle hyperbolique  $T$  de  $\mathbf{H}$  (dont les côtés sont des géodésiques de  $\mathbf{H}$ ), bordé par les

deux demi droites verticales d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ , et par le demi-cercle euclidien de diamètre  $[0, 1]$ . Clairement les sommets de ce triangle appartiennent au bord à l'infini de  $\mathbf{H}$ . On peut montrer que la "nouvelle" aire de ce triangle au sens de la géométrie de Poincaré est finie alors que son périmètre (pour la nouvelle longueur) est infinie. Les images de  $T$  par le groupe  $\text{HZ}$  sont encore des triangles bordés par des géodésiques de  $\mathbf{H}$  dont les trois sommets sont à l'infini. On montre aisément que ces sommets sont des nombres rationnels et que les images de  $T$  recouvrent  $\mathbf{H}$ , autrement dit :  $\bigcup g \in \text{HZ} gT = \mathbf{H}$ , sans se chevaucher.

Pour mettre en lumière le lien entre ce pavage et le développement en fractions continues d'un réel  $x$ , il est commode d'imaginer un point mobile dans le demi-plan de Poincaré, se dirigeant le long de la demi-géodésique  $[i, x)_{\mathbf{H}}$ . Sa trajectoire rencontre successivement des triangles du pavage de Farey. La suite de ces triangles visités est intimement reliée à la nature arithmétique de  $x$ .

Par exemple, si cette suite est finie,  $x$  est rationnel puisqu' à partir d'un certain temps, la trajectoire du point mobile reste incluse dans un triangle du pavage. On peut en savoir beaucoup plus en associant un signe aux côtés de ces triangles, selon une règle que nous allons décrire.

Pour fixer les idées, supposons que  $x$  soit un irrationnel compris entre 0 et 1. La demi-géodésique  $[i, x)_{\mathbf{H}}$  rencontre successivement une infinité de côtés de triangles du pavage. Le premier côté est la demi-droite verticale d'équation  $x = 0$  et le deuxième est le demi-cercle euclidien de diamètre  $[0, 1]$ . On associe à chaque côté rencontré, différent du premier, le signe + si juste après avoir rencontré ce côté, le point mobile entre dans un triangle du pavage en laissant un seul sommet de ce triangle sur sa gauche, et le signe - s'il en laisse deux. Par exemple, si  $x < 1$ , le signe associé au deuxième côté est -. Par ce procédé

géométrique, on obtient une suite d'entiers naturels non nuls  $n_0, n_1, n_2, \dots$  correspondant au nombre de côtés consécutifs de même signe. Dans les années 1980, C.Series a démontré, sur les traces de E.Artin, que cette suite est précisément celle intervenant dans le développement en fractions continues de  $x$ .

L'étude des pavages périodiques en géométrie de dimension 2, euclidienne ou non, est directement reliée à celle des surfaces. Ce dernier point de vue, que nous allons développer, permet de formuler en termes topologiques liés à l'excursion d'une trajectoire sur une surface, des propriétés portant sur l'incidence d'une courbe avec les motifs d'un pavage.

### **Des trajectoires sur une surface pour étudier les nombres.**

Pour commencer, revenons au pavage périodique du plan euclidien ou plus simplement au cas de la feuille de papier quadrillée par des carrés unités. Fixons l'un de ces carrés et considérons une droite  $\Delta$  illimitée le traversant. Pour rendre compte, au moyen d'un seul carré fixé, des différents carrés rencontrés par cette droite, on peut imaginer que ce carré est une table de billard et que la règle du jeu est la suivante : on lance une boule dans une direction parallèle à  $\Delta$ , lorsque la trajectoire

de la boule rencontre un côté de la table, on replace la boule sur le côté opposé, en suivant une droite horizontale ou verticale, et on lance de nouveau la boule dans la direction  $\Delta$ . Dans ce modèle, la droite  $\Delta$  est devenue la trajectoire de la boule et chaque rencontre de la boule avec un côté de la table traduit la rencontre de  $\Delta$  avec un carré du pavage.

Si maintenant l'on découpe le carré que l'on s'est fixé et si l'on recolle deux à deux les côtés parallèles, on obtient une surface ayant la forme d'une chambre à air, que l'on appelle un tore. Dans ce modèle fini, la trajectoire de la boule de billard, autrement

dit la droite  $\Delta$ , devient une courbe qui s'enroule autour de la surface.

Lorsque l'on applique un procédé analogue au pavage de Farey, ou plus précisément au domaine  $D$  associé au groupe  $H\mathbb{Z}$ , on obtient une surface appelée surface modulaire. Sa forme est celle d'une outre ayant un goulot infiniment long mais de plus en plus fin. Cette surface non euclidienne est infinie au sens où elle contient des points très éloignés, en revanche son aire est finie. Comme dans l'exemple de la feuille de papier et du billard, une géodésique du demi-plan de Poincaré devient une courbe de la surface modulaire dont la topologie reflète l'incidence de cette courbe avec les triangles du pavage. En étant familier avec ce nouveau modèle, on peut réinterpréter les résultats que nous avons exposés dans le paragraphe précédent, sur le lien entre la trajectoire d'un point mobile le long de la demi-géodésique  $[i, x)_H$  et le développement en fractions continues de  $x$ .

On obtient par exemple que si  $x$  est un nombre rationnel, la trajectoire associée au point mobile sur la surface modulaire se dirige tout droit vers le goulot. En revanche si  $x$  est irrationnel, cette trajectoire passe infiniment souvent dans une partie finie de la surface. Si elle en sort, elle tourne autour du goulot avant d'y revenir. Sous ce nouvel éclairage, la suite d'entiers naturels  $n_0, n_1, n_2, \dots$  intervenant dans le développement en fractions continues de  $x$  devient un objet dynamique puisqu'elle est reliée à la suite des nombres de tours successifs que la trajectoire réalise à chaque passage dans le goulot de la surface. En rentrant plus profondément dans la géométrie, on montre que ce nombre de tours est d'autant plus grand que la trajectoire monte haut dans la partie infinie de la surface. Si cette trajectoire ne va pas au-delà d'une certaine hauteur, les termes de la suite  $n_0, n_1, n_2, \dots$  sont donc tous inférieurs à un même entier. Dans ce modèle le nombre d'or tient une place d'exception dans le sens où, parmi toutes

les trajectoires, celle qui monte le moins haut est celle associée à ce nombre.

### Traverser des champs mathématiques.

Le monde mathématique est fait d'idées dont le berceau est souvent la théorie des nombres. Lorsqu'elles sont profondes, ces idées traversent les spécialités, encore faut-il trouver le moyen de les faire circuler. C'est précisément ce que permettent les travaux de traduction, comme ceux que nous venons d'exposer. Dans ce même esprit, la célèbre conjecture connue sous le nom d'hypothèse de Riemann, se traduit en termes de courbes sur la surface modulaire. Cette conjecture, énoncée en 1856, qui porte sur la localisation des zéros d'une fonction clef de la théorie des nombres, la fonction Zéta, est aujourd'hui l'un des problèmes ouverts les plus résistants. Le mathématicien D. Hilbert (1862- 1943) aurait dit d'elle : Si je devais me réveiller après avoir dormi mille ans, ma première question serait, l'hypothèse de Riemann a-t-elle été prouvée ?

L'approche dynamique des nombres apportera peut-être une réponse, bien avant que D. Hilbert ne se réveille.

### Références.

F. Dal'Bo *Des trajectoires pour approcher les nombres*, Pour la Science (revue) Septembre 2007 Edition Belin

S. Katok *Fuchsian groups. Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*. Chicago Press

G. Courtois, F. Dal'Bo, F. Paulin- Edition Polytechnique (accès libre <http://www.math.polytechnique.fr/xups/vol07.html>)

F. Dal'Bo. *Trajectoires géodésiques et horocycliques*. Edition EDP Science/CNRS, "Savoirs actuels"

<sup>1</sup>Françoise Dal'Bo.

Université de Rennes 1, IRMAR, dalbo@univ-rennes1.fr

## GENERAL HELICOIDS WITH POINTWISE 1 – TYPE GAUSS MAP

Athoumane Niang<sup>1</sup>

### Abstract

It is well known that the Gauss map of a constant mean curvature surface is point wise 1-type. In this paper, we show that if the Gauss map of general helicoids is pointwise 1 – type then, it's mean curvature is a constant.

**Keywords and Phrases :** hypersurface, mean curvature, Gauss map

**Résumé.** On montre que si le laplacien de l'application de Gauss d'un hélicoïde lui est proportionnel alors sa courbure moyenne est constante.

### 1 - Introduction

In the framework of the theory of finite type submanifolds (see [1], [2]), the authors of [3] raise the following problem.

*Classify all submanifolds in  $m$  – Euclidean space  $E^m$  (or in  $E_1^m$ ) satisfying the following equation  $\Delta G = fG$  (1)*

Where  $\Delta$  is the Laplacian of the induced metric,  $G$  the Gauss map of the map of the submanifold, and for some function  $f$  on the submanifold.

**Definition 1.1.** *The Gauss map of an hypersurface is said to be pointwise 1 – type if the condition (1) is satisfied.*

The authors of [3] have classified ruled surfaces in the Minkowski 3 –space  $E_1^3$  with pointwise

1 – Type Gauss map.

In the paper [4], a characterization of the helicoids as ruled surface in the Euclidean 3 – space with pointwise 1 – type Gauss map is obtained.

On the other hand, some classes of submanifolds in the pseudo-Euclidean space with finite Gauss map are studied in [5] and [6]. Choi and Piccini in [7] made a general study on submanifolds of Euclidian spaces with finite type Gauss map and classified the compact surfaces with 1 – type Gauss map.

In the papers [8] and [9], respectively, the rotation surfaces in the Euclidean space  $E^3$  and rotation surfaces in the Minkowski space  $E_1^3$  with pointwise 1 – type Gauss map have been studied and a characterization theorem of them is obtained. In this paper, we generalize the characterization for the class of general helicoids. Let us recall the following. a kinetic property of a rotation surface is its invariance by a rotation around its axis. Such a property is

---

<sup>1</sup> Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal. Email : [aniang@ucad.sn](mailto:aniang@ucad.sn)



satisfied by cylinders and by the wide class of the general helicoids which contains the cylinders and the rotation surfaces as limit cases.

It is well-known that the Gauss map of a constant mean curvature surface is pointwise 1-type ([6]).

On main result is :

*Theorem 1.2. If the Gauss map of a general helicoids in the Euclidean 3 – space is pointwise 1 – type, then its mean curvature is a constant.*

In this paper, we will assume that all surfaces are connected and all objects are at least of class  $C^3$ . We will use freely the notation of vectors by columns or by lines.

**2 - Preliminaries**

Here, we recall some fundamental formulas for surfaces to be used later in this work. Assume that  $M$  is a surface in the Euclidean 3 – dimensional space  $E^3$  with it’s canonical metric denoted by  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

For two vectors  $V = (X_1, X_2, X_3)$  and

$$W = (Y_1, Y_2, Y_3) \text{ in } E^3.$$

$$\langle V, W \rangle = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3, \quad (2)$$

and their dot product is given by,

$$V \times W = (X_2 Y_3 - X_3 Y_2, X_3 Y_1 - X_1 Y_3, X_1 Y_2 - X_2 Y_1). \quad (3)$$

The surface  $M$  may be given locally by an one-to-one isometric immersion  $X$  of a open subset  $U$  of  $\mathbb{R}^2$  into  $E^3$ ,

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E^3$$

$$(s, v) \mapsto X(s, v)$$

And we can identified  $X(U)$  with  $U$ . So  $(s, v)$  are local coordinates on  $U$  (see [12]).On  $U$ , the Gauss map  $G$  is given by the following formulas

$$G = \frac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|}, \quad (4)$$

where  $X_s = \frac{\partial X}{\partial s}$  and  $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$ . The first fundamental form I and the second fundamental form II of the surface  $M$  are given in  $U$  by

$$\begin{cases} I = \langle X_s, X_s \rangle ds^2 + 2\langle X_s, X_v \rangle ds dv + \langle X_v, X_v \rangle dv^2, \\ II = \langle G, X_{ss} \rangle ds^2 + 2\langle G, X_{sv} \rangle dsdv + \langle G, X_{vv} \rangle dv^2 \end{cases} \quad (5)$$

The mean curvature  $H$  of the surface is then obtained by the formulas

$$H = \frac{\langle G, X_{ss} \rangle \langle X_v, X_v \rangle - 2 \langle G, X_{sv} \rangle \langle X_s, X_v \rangle + \langle G, X_{vv} \rangle \langle X_s, X_s \rangle}{\langle X_s, X_s \rangle \langle X_s, X_s \rangle - \langle X_v, X_s \rangle^2} \quad (6)$$

For the Laplacian of the surface M, in local coordinates  $(x_1, x_2)$  on U, we have the following formula

$$\Delta = \frac{1}{[\det (g_{ij})]^{\frac{1}{2}}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left[ \frac{de}{dt} (g_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}, \quad (7)$$

where,  $(g_{ij})$  is the matrix of the first fundamental form I of the surface.

### 3 - Proof of the theorem

#### Step 1

In this first step, we establish some formulas.

We will use the formulas (4) and (7) above to compute the Gauss map G and the Laplacian  $\Delta G$  of a general helicoid. We will consider that a general helicoid is given by an one-to-one isometric immersion X defined on the open set U of  $\mathbb{R}^2$  by

$$X(s, v) = \begin{pmatrix} x(s) \cos v \\ y(s) \sin v \\ z(s) + hv \end{pmatrix}, \text{ where } x(s) > 0, h \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

and where the profile curve  $s \rightarrow (x(s), 0, z(s))$  is parametrised by the arc length s, that is,

$$x'^2 + z'^2 = 1 \quad (9)$$

(see [5]). From  $X_s = \begin{pmatrix} x' \cos v \\ x' \sin v \\ z' \end{pmatrix}$  and

$X_v = \begin{pmatrix} -x \sin v \\ x \cos v \\ h \end{pmatrix}$ , we get the first fundamental form

$$I = ds^2 + 2hz' dsdv + (x^2 + h^2) dv^2 ; \quad (10)$$

and the vector

$$X_s \times X_v = \begin{pmatrix} hx' \sin v - xz' \cos v \\ -xz' \sin v - hx' \cos v \\ xx' \end{pmatrix}.$$

Then we get from (9)

$$\begin{aligned} \|X_s \times X_v\|^2 &= h^2 x'^2 + x^2 z'^2 + x^2 x'^2, \\ &= h^2 x'^2 + x^2 (x'^2 + z'^2), \\ &= h^2 x'^2 + x^2. \end{aligned}$$

It will be convenient to introduce the function

$$\delta = (x^2 + h^2 x'^2)^{1/2}. \quad (11)$$

By using the expression of  $X_s \times X_v$  given above, we get the Gauss map in the form

$$G = \begin{pmatrix} A(s) \sin v - B(s) \cos v \\ -B(s) \sin v - A(s) \cos v \\ C(s) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

where,

$$A = \frac{hx'}{\delta}, B = \frac{xz'}{\delta}, C = \frac{xx'}{\delta} \quad (13)$$

satisfy

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1. \quad (14)$$

Now we use the expression of the Gauss map in (12) and the vectors

$$\begin{aligned} X_{ss} &= (x \cos v, x \sin v, z''); \\ X_{sv} &= (-x' \sin v, x' \cos v, 0); \\ X_{vv} &= (-x \cos v, -x \sin v, 0); \end{aligned}$$

to obtain that,

$$\begin{aligned} \langle G, X_{ss} \rangle &= -x'' B + z'' C; \\ \langle G, X_{sv} \rangle &= -x' A; \\ \langle G, X_{vv} \rangle &= x B. \end{aligned}$$

$$II = (-x'' B + z'' C) ds^2 - 2x' A ds dv + x B dv^2 \quad (15)$$

$$2H = \frac{U(-x'' B + z'' C) + 2hx' z' A + x A}{\delta^2} \quad (16)$$

Where,

$$U = U(s) = x^2 + h^2. \quad (17)$$

We will get the derivate of the mean curvature in the following equation:

$$2H' = \left[ \frac{U(-x'' B + z'' C)}{\delta^2} \right]' + \left[ \frac{2hx' z' A + x A}{\delta^2} \right]' \quad (18)$$

Finally, it remains to find the Laplacian  $\Delta G$  of the Gauss map  $G$ . Since the matrix  $(g_{ij})$  of the first fundamental form  $I$  is

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & hz' \\ hz' & U \end{pmatrix},$$

Then its inverse is

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\delta^2} \begin{pmatrix} U & -hz' \\ -hz' & 1 \end{pmatrix}.$$

Thus

$$\delta \Delta = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \delta \left( \left( \frac{U}{\delta^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} - \left( \frac{hz'}{\delta^2} \right) \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \delta \left( - \left( \frac{hz'}{\delta^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]$$

By (7)

So, we get easily that

$$\delta\Delta G = \left(\frac{U}{\delta}\right)' G_s + \left(\frac{U}{\delta}\right) G_{ss} - \left(\frac{hz'}{\delta}\right)' G_v - 2 \left(\frac{hz'}{\delta}\right) G_{sv} + \left(\frac{1}{\delta}\right) C_{vv} \quad (19)$$

To obtain  $\delta\Delta G$ , we will need the following six vectors,

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} A \sin v - B \cos v \\ -B \sin v - A \cos v \\ C \end{pmatrix} \\ G_s &= \begin{pmatrix} A' \sin v - B' \cos v \\ -B' \sin v - A' \cos v \\ C' \end{pmatrix} \\ G_v &= \begin{pmatrix} B \sin v + A \cos v \\ -A \sin v - B \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ G_{sv} &= \begin{pmatrix} B' \sin v + A' \cos v \\ A' \sin v - B' \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ G_{ss} &= \begin{pmatrix} A'' \sin v - B'' \cos v \\ B'' \sin v - A'' \cos v \\ C'' \end{pmatrix} \\ G_{vv} &= \begin{pmatrix} -A \sin v - B \cos v \\ B \sin v - A \cos v \\ C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

So we can see that

$$\delta\Delta G = G_v = \begin{pmatrix} \alpha(s) \sin v - \beta \cos v \\ -\beta \sin v - \alpha \cos v \\ \gamma(s) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

Where  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  are given by

$$\begin{cases} \alpha = \left(\frac{U}{\delta}\right)' A' - \left(\frac{hz'}{\delta}\right)' B - 2 \left(\frac{hz'}{\delta}\right) B' + \left(\frac{U}{\delta}\right) A' - \left(\frac{1}{\delta}\right) A; \\ \beta = \left(\frac{U}{\delta}\right)' B' - \left(\frac{hz'}{\delta}\right)' A + 2 \left(\frac{hz'}{\delta}\right) A' + \left(\frac{U}{\delta}\right) B' - \left(\frac{1}{\delta}\right) B; \\ \gamma = \left(\frac{U}{\delta}\right)' C' + \left(\frac{U}{\delta}\right) C'' \end{cases} \quad (21)$$

These relations can be rewritten as

$$\begin{cases} \alpha = \left[\left(\frac{U}{\delta}\right) A'\right]' - \left(\frac{hz'}{\delta}\right)' B - 2 \left(\frac{hz'}{\delta}\right) B' - \left(\frac{1}{\delta}\right) A; \\ \beta = \left[\left(\frac{U}{\delta}\right) B'\right]' + \left(\frac{hz'}{\delta}\right)' A + 2 \left(\frac{hz'}{\delta}\right) A' + \left(\frac{1}{\delta}\right) B; \\ \gamma = \left[\left(\frac{U}{\delta}\right) C'\right]' \end{cases} \quad (22)$$

**Remarque 3.1.** From the expression of  $\delta\Delta G$  given in (20) and that of the Gauss map  $G$  in (12), we get that

$$\delta\Delta G, G) = \alpha A + \beta B + \gamma C. \quad (23)$$

Which becomes?

$$\begin{cases} \alpha = (\alpha A + \beta B + \gamma C) A , \\ \beta = (\alpha A + \beta B + \gamma C) B , \\ \gamma = (\alpha A + \beta B + \gamma C) C . \end{cases} \quad (24)$$

**Step 3**

Here we make some remarks for solving the equations in (24).

Since  $A = \frac{hx'}{\delta}$ , we first assume that  $x' = 0$  and  $h \neq 0$ . In this case, the surface is right helicoids.

Indeed we have  $x = x_0$  a positive number,  $z = 1$  or  $z = -1$ ,  $A = C = 0$ , and  $B = \pm 1$ .

The right helicoid is a minimal surface, that is, a surface of constant mean curvature zero.

If  $h = 0$ , the surface becomes a rotation surface and the problem is solved in [5]. In the remaining parts we will assume that  $h$  is not zero and  $x'$  is never zero.

**Step 4**

In this last step, we may assume that  $A = A(s) = \frac{hx'}{\delta}$  is a non vanishing function on some interval of the real line (by step 3).

a).First, we are going to prove that the condition (24) is equivalent to the two following equations:

$$\beta A = \alpha B; \gamma A = \alpha C \quad (25)$$

From (24), we have  $\alpha = \lambda A$ ,  $\beta = \lambda B$ ,  $\gamma = \lambda C$ , where,  $\lambda = \alpha A + \beta B + \gamma C$ .

Then (25) is easily obtained.

Conversely, assume (25) is true. The equation  $\beta A = \alpha B$  implies  $\alpha = \lambda A$  and  $\beta = \lambda B$ , for some function  $\lambda = \lambda(s)$ .

But, since  $A$  is never zero, we have  $\lambda = \frac{\alpha}{A}$ . Then, the second equation in (25) becomes,  $\gamma = \lambda C$ .

So we have  $\alpha = \lambda A$ ,  $\beta = \lambda B$ ,  $\gamma = \lambda C$ . Since  $A^2 + B^2 + C^2 = 1$

Then  $\lambda = \alpha A + \beta B + \gamma C$ . So (24) implies (25). Finally, (24) is equivalent to (25).

b).If  $\beta A = \alpha B$ , then  $H$  is constant

Using (22),  $\beta A = \alpha B$  is equivalent to

$$\left[ \left( \frac{U}{\delta} \right) B' \right]' A \left( \frac{U}{\delta} \right) A' B + \left( \frac{hz'}{\delta} \right)' (A^2 + B^2) + \left( \frac{2hz'}{\delta} \right) (AA' + BB') = 0 \quad (26)$$

$$T_1 + T_2 = 0,$$

We can put equation (26), in the form

Where  $T_1 = \left[ \frac{U}{\delta} (B'A - A'B) \right]'$ ,  $T_2 = \left[ \frac{hz'}{\delta} (A^2 + B^2) \right]'$  using the fact

$$(B'A - A'B)' = B''A - A''.$$

From the equation (13), we get:

$$A' = h \frac{x''\delta - x'\delta'}{\delta^2}$$

And

$$B' = \frac{x''z'\delta + xz''\delta - xz'\delta'}{\delta^2}$$

Then

$$\begin{aligned} B'A = A'B &= \frac{h}{\delta^3} \{x'^2 z'\delta + x x' z''\delta - x x' z'\delta' + x x' z'\delta'\} \\ &= \frac{h}{\delta^2} \{x'^2 z' + (xx') z''\delta - (x z') x''\} \\ &= \frac{h}{\delta^2} [C z'' - B x''] + \frac{hx'^2 z'}{\delta^2} \text{ by (13)} \end{aligned}$$

Bearing in mind that  $T_1 = \left[ \frac{U}{\delta} (B'A - A'B) \right]'$ , we have

$$T_1 = h \left[ \frac{U}{\delta^2} (C z'' - B x'') + \frac{x'^2 z' U}{\delta^3} \right]'$$

So, the relation  $T_1 + T_2 = 0$  becomes

$$\left[ \frac{U}{\delta^2} (C z'' - B x'') + \frac{x'^2 z' U}{\delta^3} \right]' + \left[ \frac{x'^2 z' U}{\delta^3} = \frac{z'}{\delta} (A^2 + B^2) \right]' = 0.$$

Now it remains to compare this equation, with the equation (18) which can be written as

$$\left[ \frac{U}{\delta^2} (C z'' - B x'') \right]' = 2H' - \left[ \frac{2hx'z'A + xB}{\delta^2} \right]'$$

We get easily that  $T_1 + T_2 = 0$  becomes

$$2H' - \left[ \frac{2hx'z'A + xB}{\delta^2} \right]' + \left[ \frac{x'^2 z' U}{\delta^3} + \frac{z'}{\delta} (A^2 + B^2) \right]' = 0$$

That is  $2H' + T = 0$ , where

$$T = \left[ \frac{2hx'z'A + xB}{\delta^2} \right]' + \left[ \frac{x'^2 z' U}{\delta^3} + \frac{z'}{\delta} (A^2 + B^2) \right]'$$

Now let us show that  $T$  is zero.

Since  $A = \frac{xx'}{\delta}$ ,  $B = \frac{xz'}{\delta}$ ,  $U = x^2 + h^2$ , we have:

$$T = \left[ \frac{z'}{\delta^3} \left( -2h^2 x'^2 - x^2 + x'^2 (x^2 + h^2) + h^2 x'^2 + x^2 z'^2 \right) \right]'$$

Finally, by using the fact that  $z'^2 = 1 - x'^2$ , we see that

$$T = \left[ \frac{z'}{\delta^3} \left( -x + x'^2 x^2 + x^2 (1 - x'^2) \right) \right]' = 0$$

Hence, the theorem is proved.

### References

[1] Chen B. Y., On submanifolds of finite type, Soochow J. Maths. 9 (1987), 65 – 81.

- [2] Chen B. Y., Total Mean Curvature and Submanifolds of finite type, World Scientific, Singapore, 1984.
- [3] Kim Y. H., Yoon D.W., Ruled surfaces with pointwise 1 – type Gauss map, J. Geom. Phys. 34 (2000), 191 – 205.
- [4] Choi M. K., Kim Y.H., Characterization of the helicoids as ruled surface with pointwise 1 – type Gauss map, Bull. Korean Math Soc. 38 (2001); No 4.
- [5] Alias L. J., Ferranandez, Lucas P., and Meroño M.A., On the Gauss map of B – scrolls, Tsukuba J. Maths. 22 (1998), 317 – 377.
- [6] Choi S.M., On the Gauss map of ruled surfaces in a three – dimensional Minkowski space, Tsukuba J. Maths. 19 (1995), 285 – 304.
- [7] Chen B.Y., Total Mean Curvature and Submanifolds with finite 1 – type Gaus map. Bull. Austral. Math. Soc. 35 (1987), 161 – 180.
- [8] Niang A., Rotation surface surfaces with pointwise 1 – type Gauss map, Bull. Korean Math. Soc. 42 (2005) No 1, 23 – 27.
- [9] Niang A., On the rotation surfaces in the Minkowski 3 – dimensional space with pointwise 1 – type Gauss map. J. Korean Math. Soc. 41 (2004). No. 6, 1007 – 1021.
- [10] Kenmotsu K., Surfaces with constant mean curvature, Translations of Mathematical Monographs, 221. American Mathematical Society, Providence, RI, (2003), 71, Lemma 5.4.
- [11] T. Weinstein, An introduction to Lorenz surface, Walter de Gruyer, Berlin, New – York (1996), pp 150, pp 162 – 163, pp 153 – 156.

## CHARACTERIZATION OF HOLOMORPHICALLY FILLABLE CONTACT STRUCTURES ON SOME $T^2$ -BUNDLES OVER $S^1$

Hamidou DATHE<sup>1</sup>, Cheikh KHOULE<sup>2</sup>

### Abstract.

In this notes we give An estimation up to isotopy of the number of holomorphically fillable contact structures on  $T^2$ -bundle over  $S^1$ , with non-periodic monodromy matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  satisfying  $|\text{tr } A| = 2$ .

**Keywords and Phrases :**  $T^2$ -bundles over the  $S^1$ , monodromy, hollomorphically fillable.

### Résumé.

Dans cet article on donne une estimation, à isotopie près, du nombre de structures de contact holomorphiquement remplissables sur les fibres en tores  $T^2$  sur le cercle  $S^1$  dont la matrice de monodromie est de trace en valeur absolue égale à 2.

### 0-Introduction

The main Theorem in this paper is the following.

**Theorem 0.0.1** Let  $M$  be a  $T^2$ -bundle over  $S^1$  with non-periodic monodromy matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  satisfying  $|\text{tr } A| = 2$  and  $HF_M$  the number up to isotopy of holomorphically fillable contact structures on  $M$ . Then we have  $1 \leq HF_M \leq 3$ .

Before proving the main Theorem 0.0.1 in section 3, we recall in section 1, general notions of contact structures, most of them are taken in papers cited in reference.

In section 2, we discuss tightness and fillability of a contact structure. As an application we recall the result of Y. Eliashberg ([4]), which assert that there exist a unique holomorphically fillable contact structure on the 3-torus with the particularity that here the explicit filling is given.

So the result of this paper can be seen as an extension of the result of Y. Eliashberg in ([4]) to all  $T^2$ -bundle over  $S^1$  with non-periodic monodromy matrix  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  satisfying  $|\text{tr } A| = 2$ .

---

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal, [hamidou.dathe@yahoo.fr](mailto:hamidou.dathe@yahoo.fr).

<sup>2</sup> Department of Mathematics, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, sénégal, [chkhoule@hotmail.fr](mailto:chkhoule@hotmail.fr).



## 2 - Contact manifolds

We recommend as a general reference on contact geometry Geiges' recent textbook ([9]).

Let  $M$  be a differential manifold and  $\xi \subset TM$  a hyper plane fields on  $M$ . Locally  $\xi$  can always be written as the kernel of a non-vanishing 1-form  $\alpha$ . One way to see this is to choose an auxiliary Riemannian metric  $g$  on  $M$  and then to define  $\alpha = g(X, \cdot)$ , where  $X$  is a local non-zero section of the line bundle  $\xi^\perp$  (the orthogonal complement of  $\xi$  in  $TM$ ). We see that the existence of a globally defined 1-form  $\alpha$  with  $\xi = \text{Ker } \alpha$  is equivalent to the orientability (hence triviality) of  $\xi^\perp$ , i.e. the coorientability of  $\xi$ . In this paper, the manifold  $M$  will be assumed to be oriented and all the plane fields supposed to be coorientable.

If  $\alpha$  satisfies the Frobenius integrability condition  $\alpha \wedge d\alpha = 0$ , then  $\xi$  is an integrable hyper plane field (and vice versa), and its integral submanifolds form a codimension 1 foliation of  $M$ . And an integrable hyper plane field is locally of the form  $dp = 0$ , where  $p$  is a coordinate function on  $M$ .

Contact structures are in a certain sense the exact opposite of integrable hyper plane fields.

### 1.1 Basic notions

**Definition 1.1.1** Let  $M$  be a  $(2n+1)$ -dimensional manifold. A **contact structure** on  $M$  is a hyper plane distribution  $\xi$  in  $TM$  given by a global 1-form  $\alpha$  such that  $\alpha \wedge (d\alpha)^n$  vanishes nowhere. We say that the pair  $(M, \xi)$  is a **contact manifold** and that  $\alpha$  is a **contact form**. The form  $\alpha$  is called **positive** if  $\alpha \wedge (d\alpha)^n$  defines the chosen orientation of  $M$ . If  $n$  is odd, then the orientation defined by  $\alpha \wedge (d\alpha)^n$  does not depend on the choice of the defining form

$\alpha$ , hence one can speak about **positive contact structures**.

The following listed 1-forms are contact forms and the verification is left to the reader.

**Example 1.1.2** on  $R^{2n+1}$  with Cartesian coordinates  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$ , the 1-form  $\alpha_1 = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$  is a contact form.

**Example 1.1.3** on  $R^{2n+1}$  with polar coordinates  $(r_j, \theta_j)$  for the  $(x_j, y_j)$ -plane,  $j=1, \dots, n$ , the 1-form  $\alpha_1 = dz + \sum_{j=1}^n r_j d\theta_j = dz + \sum_{j=1}^n (x_j dy_j - y_j dx_j)$  is a contact form.

**Example 1.1.4** on the sphere  $S^{2n+1}$ , say  $S^3$ . On has a contact form  $\alpha$  by restricting on  $S^3$  the 1-form  $\omega_0$  on  $R^4$ , with coordinates  $(x_0, y_0, x_1, y_1)$  defined as follow:  
 $\omega_0 = x_0 dy_0 - y_0 dx_0 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1$ .

Let us discuss now the problem of classification of contact structures. As in any problem of classification, one has to decide first which objects are considered equivalent. A particular case of homotopy is obtained by changing the structure using a path of isomorphisms of the underlying fixed space, in which case one speaks about isotopy. Let us be more formal for the case of contact structures.

**Definition 1.1.5** Two contact manifolds  $(M_1, \xi_1)$  and  $(M_2, \xi_2)$  are called **contactomorphic** if there is a diffeomorphism  $f: M_1 \rightarrow M_2$  with  $f_*(\xi_1) = \xi_2$ , where  $f_*: TM_1 \rightarrow TM_2$  denotes the differential of  $f$ . If  $\xi_i = \text{Ker } \alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , this is equivalent to the existence of a nowhere zero function  $\lambda: M_1 \rightarrow R$  such that  $f^* \alpha_2 = \lambda \alpha_1$ .

**Example 1.1.6** the contact manifolds  $(R^{2n+1}, \xi_i = \text{Ker } \alpha_i, i = 1, 2)$  from the preceding examples are contactomorphic. An explicit contactomorphism  $f$  with  $f^* \alpha_2 = \alpha_1$  is given by:  $f(x; y; z) = [(x + y) / 2, (y - x) / 2, z + x y / 2]$ , where  $x$  and  $y$  stand for

$(x_1, \dots, x_n)$  and  $(y_1, \dots, y_n)$ , respectively, and  $x \cdot y$  stands for  $\sum_j x_j y_j$ .

Similarly, both these contact structures are contactomorphic to  $\text{Ker}(dz - \sum_j x_j y_j)$ . Any of these contact structures is called the **standard contact structure** on  $R^{2n+1}$ .

**Definition 1.1.7** A **homotopy** between two contact structures is a smooth path of contact structures connecting them.

An **isotopy** between two contact structures is a homotopy of the form  $(\phi_t^* \xi)_t$ , where  $(\phi_t)_t$  is a smooth path of self-diffeomorphisms of  $M$ .

Two contact structures  $\xi$  and  $\xi'$  on  $M$  are **homotopic**, resp. **isotopic**, resp. **isomorphic** if there is a homotopy, resp. an isotopy, resp. a contactomorphism of  $M$  which sends  $\xi$  on  $\xi'$ .

One usually tries to classify contact structures on a given manifold up to isotopy or up to contactomorphism. Any contact structure may be seen as a hyper plane field, but one has to be careful because a homotopy between the underlying hyper plane fields of two contact structures is not necessarily a homotopy of contact structures.

Again, a general problem of classification of structures splits into a local and into a global one. Like complex structures and foliations, contact forms have no local invariants:

**Theorem 1.1.8** (Darboux) Any contact form may be written in suitable local coordinates as the standard contact structure on  $R^{2n+1}$ .

Globally the situation is distinct, due to the fact that there is a canonical vector field attached to any contact form.

**Definition 1.1.9** Associated with a contact form  $\alpha$  one has the so-called Reeb vector field  $R_\alpha$  defined by the equations:

(i)  $d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$

(ii)  $\alpha(R_\alpha) = 1$ .

Then any dynamical invariants of the Reeb vector field are invariants of the contact form, which makes one, feel that by deforming a form, the global structure may change drastically. When one keeps instead of the whole contact form only the contact structure defined by a contact form, the situation is completely different.

**Theorem 1.1.10** (Gray [14]) two homotopic contact structures on a closed manifold are isotopic.

## 1.2 Contact structures and Sasakian metrics

**Definition 1.2.1** An almost contact structure on a differentiable manifold  $M$  is a triple  $(Z, \eta, \Phi)$ , where  $\Phi$  is a tensor field of type  $(1, 1)$  (i.e. an endomorphism of  $TM$ ),  $Z$  is a vector field, and  $\alpha$  is a 1-form which satisfy  $\eta(Z) = 1$  and  $\Phi \circ \Phi = -I + Z \otimes \eta$ , where  $I$  is the identity endomorphism on  $TM$ . A smooth manifold with such a structure is called an **almost contact manifold**.

We have seen that contact geometry exists only in odd dimensions. But it interacts very deeply with an even-dimensional geometry, namely symplectic geometry.

**Definition 1.2.2** A **symplectic form** on an even-dimensional vector space is a non-degenerate exterior form of degree 2. A **symplectic form** on an even-dimensional manifold is a closed non-degenerate smooth form of degree 2. A **symplectic manifold** is a manifold endowed with a symplectic form.

Let  $(M, \alpha)$  be a contact manifold with a contact 1-form  $\alpha$  and consider  $\xi = \text{Ker } \alpha \subset TM$ . The subbundle  $\xi$  is maximally non-integrable and it is called the contact distribution. As a first example of the

presence of symplectic structures in the contact world, note that part of Definition 1.1.1 may be rephrased as saying that  $\alpha$  is a contact form if and only if  $d\alpha$  is a symplectic form in restriction to  $\text{Ker}\alpha$ . An equivalent formulation of the contact condition is that the pair  $(\xi, d\alpha|_{\xi})$  gives  $\xi$  the structure of a symplectic vector bundle. We denote by  $J(\xi)$  the space of all almost complex structures  $J$  on  $\xi$  that are compatible with  $d\alpha|_{\xi}$ , that is the subspace of smooth sections  $J$  of the endomorphism bundle  $\text{End}(\xi)$  that satisfy:

$$J^2 = -I, d\alpha(JX, JY) = d\alpha(X, Y),$$

$$d\alpha(X, JX) > 0 \quad (1)$$

for any smooth sections  $X, Y$  of  $\xi$ . Notice that each  $J \in J(\xi)$  defines a Riemannian metric  $g_{\xi}$  on  $\xi$  by setting:

$$g_{\xi}(X, Y) = d\alpha(X, JY). \quad (2)$$

One easily checks that  $g_{\xi}$  satisfies the compatibility condition  $g_{\xi}(JX, JY) = g_{\xi}(X, Y)$ . Furthermore, the map  $J \rightarrow g_{\xi}$  is one-to-one, and the space  $J(\xi)$  is contractible. A choice of  $J$  gives  $M$  an almost CR structure.

Moreover, by extending  $J$  to all of  $TM$  one obtains an almost contact structure. There are some choices of conventions to make here. We define the section  $\Phi$  of  $\text{End}(TM)$  by  $\Phi = J$  on  $\xi$  and  $\Phi R_{\alpha} = 0$ , where  $R_{\alpha}$  is the Reeb vector field associated to  $\alpha$ . We can also extend the transverse metric  $g_{\xi}$  to a metric  $g$  on all of  $M$  by

$$g(X, Y) = g_{\xi}(X, Y) + \alpha(X)\alpha(Y) = d\alpha(X, \Phi Y) + \alpha(X)\alpha(Y), \quad (3)$$

for all vector fields  $X, Y$  on  $M$ . One easily also sees that  $g$  satisfies the compatibility condition  $g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \alpha(X)\alpha(Y)$ .

**Definition 1.2.3** A contact manifold  $M$  with a contact form  $\alpha$ , a vector field  $R_{\alpha}$  a

section  $\Phi$  of  $\text{End}(TM)$ , and a Riemannian metric  $g$  which satisfy the conditions

$$\alpha(R_{\alpha}) = 1 \text{ and } \Phi \circ \Phi = -I + R_{\alpha} \otimes \alpha,$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \alpha(X)\alpha(Y)$$

is known as a **contact metric** on  $M$ .

**Definition 1.2.4** A contact metric manifold  $(M, \alpha)$  is called a **Sasakian manifold** if the Reeb vector field  $R_{\alpha}$  of  $\alpha$  is a Killing vector field of unit length on  $M$  so that the tensor field  $\Phi$  of type  $(1, 1)$ , defined by  $\Phi(X) = -\nabla_X R_{\alpha}$  satisfies the condition

$$(\nabla_X \Phi)(Y) = g(X, Y)R_{\alpha} - g(R_{\alpha} Y)X$$

for any pair of vector fields  $X$  and  $Y$  on  $M$  and where  $\nabla$  denote the Levi-Civita connection associated to the contact metric.

The quadruple  $S = (R_{\alpha}, \alpha, \Phi, g)$  is called a **Sasakian structure** on  $M$ .

**Definition 1.2.5** Let  $(M, S)$  be a Sasakian manifold and let  $\phi: M \rightarrow M$  be a diffeomorphism, then  $(M, \phi^*S)$  is a isomorphic Sasakian structure where

$$\phi^*S = (\phi^1 R_{\alpha}, \phi^* \alpha, \phi^1 \Phi \phi^*, \phi^* g).$$

### 1.3 Contact structures coming from complex geometry.

Another very important class of examples (which is the central one for the results presented here) comes from complex analytic geometry.

Start from a connected complex manifold  $X$  of complex dimension  $n \geq 2$  and from a real smooth hypersurface  $M$  of it.

Denote by  $J: TX \rightarrow TX$  the (integrable) almost complex structure associated to the complex structure of  $X$ , where  $TX$  denotes the tangent bundle of the underlying smooth manifold of  $X$ .

Then  $J(TM)$  cannot be equal to  $TM$ , because this last space is odd-dimensional.

Therefore  $\xi := TM \cap J(TM)$  is a  $J$ -invariant subspace of real codimension 1 of  $TM$ , that is, a hyper plane distribution with a natural complex structure  $J|_{\xi}$ . We will call it the complex distribution of  $M \rightarrow X$ .

For various hypersurfaces  $M$  one can get all the degrees of integrability of this distribution, from the completely integrable case till the completely non-integrable (or contact) one. A general situation when  $\xi$  is automatically contact is got when  $M$  is strongly pseudoconvex.

**Definition 1.3.1** Let  $\rho$  be a smooth function on  $X$ . It is called **strictly plurisub-harmonic** (abbreviated **spsh**) if  $-d(d^c \rho) > 0$ , where  $d^c \rho := d\rho \circ J \in T^*X$ .

If a cooriented real hypersurface of  $X$  may be defined locally in the neighborhood of any of its points as a regular level of a spsh function which grows from its negative to its positive side, then it is called **strongly pseudoconvex**.

It is important to take care about the coorientation of the hypersurface: seen from one side it is pseudoconvex, from the other it is pseudoconcave. The terminology was chosen such that the positive side is the pseudoconcave one, distinguished by the fact that holomorphic curves tangent to the hypersurface are locally contained in that side.

The announced general family of contact manifolds given by complex geometry is presented in the next proposition:

**Proposition 1.3.2** ([21]) *The complex distribution of any strongly pseudoconvex hypersurface of a complex manifold is a (naturally oriented) contact structure.*

The simplest example of this type of construction is given by  $X = \mathbb{C}^{n+1}$ , with  $n \geq 1$

and  $\rho := \sum_{j=1}^{n+1} |z_j|^2$ . This is a proper spsh function. The complex distribution on any euclidean sphere centered at the origin is therefore a contact structure. As homotheties centered at the origin leave both the foliation of  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  by such spheres and the almost complex structure invariant, they realize contactomorphisms between all such contact spheres. Therefore, one gets a well-defined contact structure on  $S^{2n+1}$ , called the standard contact structure on it.

## 2 - Tightness and fillability

There is a strong relationship between contact topology and symplectic topology due to the fact that contact structures provide natural boundary conditions for symplectic structures on manifolds with boundary. Given a contact manifold  $(M, \xi)$  and a symplectic manifold  $(W, \omega)$  with  $\partial W = M$ , we say that  $(W, \omega)$  fills  $(M, \xi)$  if some compatibility conditions are satisfied. Depending on how restricting these conditions are, there are several different notions of fillability.

In the following we will always assume that  $M$  is an oriented 3-manifold and  $\xi$  is oriented and positive. This means that  $\xi$  is the kernel of a globally defined smooth 1-form  $\alpha$  on  $M$  such that  $\alpha \wedge d\alpha$  is a volume form inducing the fixed orientation of  $M$ .

**Definition 2.0.3** *The contact structure  $\xi$  on  $M$  is called tight if there is no embedded disc  $D \subset M$  such that its boundary  $\partial D$  is tangent to  $\xi$  while  $D$  is transversal to  $\xi$  along the boundary.*

Tightness of a contact structure is guaranteed by the following properties of fillability.

### 2.1 Various notions of fillability.

Let us come back to the examples of contact manifolds originating in complex geometry.

**Definition 2.1.1** A complex manifold with a proper spsh function is called a **Stein manifold**.

Consider a Stein manifold  $X$  and a proper spsh function  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  bounded from below. Let  $M := X_{\rho=a}$  be a regular level of  $\rho$ . We call the compact sublevel  $Y := X_{\rho \leq a}$  a compact Stein manifold. One should note that  $Y$  is a compact smooth manifold with boundary, but that it is not a compact complex manifold. By Proposition 1.3.2, the complex distribution on  $M$  is a contact structure. This motivates:

**Definition 2.1.2** A contact manifold which is contactomorphic to the contact boundary of a compact Stein manifold is called **Stein fillable**, and any such compact Stein manifold is a **Stein filling** of the initial manifold.

A more general notion is obtained by asking that the bounded from below and proper function  $\rho$  be spsh only in a neighborhood of its considered regular level  $M$ . One obtains then the notion of compact complex manifold with boundary, and a related notion of filling:

**Definition 2.1.3** A contact manifold which is contactomorphic to the complex distribution on a strongly pseudoconvex boundary of a compact complex manifold with boundary is called **holomorphically fillable**, and any such compact complex manifold is a **holomorphic filling** of the initial manifold.

Holomorphically fillable contact structure can be found in the world of Sasakian manifold by a result of Marinescu and Yeganefar ([20]), which assert that:

**Proposition 2.1.4** ([20]) every compact Sasakian manifold is holomorphically fillable.

One may forget part of the previous structures in order to arrive at concepts of symplectic geometry, which make no reference to an almost-complex structure:

**Definition 2.1.5** A **strong symplectic filling** of  $(M, \xi)$  is a compact symplectic manifold  $(Y, \omega)$  with boundary  $\partial Y = M$  such that there exists a primitive  $\alpha$  of  $\omega$  in a neighborhood of  $M$  whose restriction to  $M$  is a defining form of  $\xi$ .

A **weak symplectic filling** of  $(M, \xi)$  is a compact symplectic manifold  $(Y, \omega)$  with boundary  $\partial Y = M$  such that the restriction of  $\omega$  to  $\xi$  is a field of positive symplectic forms on  $\xi$ .

Thus, we have four different rigidity notions for contact structures, which are ordered as follows:

**Proposition 2.1.6** holomorphically fillable  $\Rightarrow$  Stein fillable  $\Rightarrow$  strongly symplectically fillable  $\Rightarrow$  weakly symplectically fillable  $\Rightarrow$  tight.

**Proof.** Weakly fillable contact structures are tight by a deep theorem of Eliashberg and Gromov ([5, 15]). And by the Definition (2.1.5), we see that strongly symplectically fillable are weakly symplectically fillable. If  $(M, \xi)$  is a holomorphically fillable contact 3-manifold, then it is necessarily Stein fillable (Bogomolov and de Oliveira ([3])), so there exists a Stein manifold  $X$  and a proper spsh function

$\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  bounded from below such that  $M := X_{\rho=a}$  be a regular level of  $\rho$ . If one denotes:

$$\begin{aligned} \alpha_\rho &:= -d^c \rho \\ \omega_\rho &:= d\alpha_\rho. \end{aligned}$$

Then  $\alpha_\rho|_M$  is a contact form defining  $\xi$ ,  $\omega_\rho$  is a symplectic form on  $X$  and  $(X_{\rho \leq a}, \omega_\rho)$  is a compact symplectic manifold with boundary  $\partial X_{\rho \leq a} = M$ , thus  $(M, \xi)$  is strongly symplectically fillable by the Definition (2.1.5).

However, it is know now that the four different rigidity notions do not coincide: tight but non weakly fillable contact

structures have been found first by Etnyre and Honda ([8]) and later by Lisca and Stipsicz ([18, 19]). A weakly fillable but not strongly fillable contact structure has been found first by Eliashberg ([4]) and later more have been found by Ding and Geiges ([10]). And strongly fillable contact 3-manifolds without Stein fillings have been found by Ghiggini in ([12]).

## 2.2 Fillable contact structure on $T^3$

Most of the results in this section can be found in ([4]). The standard contact structure  $\zeta_1$  on  $T^3$  is the contact structure on the unit cotangent bundle of the 2-torus. If  $(x, y)$  are cyclic coordinates in  $T^2$ , and  $\theta$  is a 1-periodic coordinate along the fiber  $S^1$ , then  $\zeta_1$  can be defined by the 1-form  $\alpha_1 = \cos\theta dx + \sin\theta dy$ .

**Proposition 2.2.1** *the standard contact structure  $\zeta_1$  is holomorphically fillable.*

**Proof.** Indeed, as every cotangent space  $T^*T^2 = T^2 \times \mathbb{R}^2$  is equipped with a natural symplectic form  $\omega_0 = d\lambda$ , where  $\lambda$  is the Liouville 1-form  $\lambda = z_1 dx + z_2 dy$ , where  $(x, y) \in T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  and  $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ . Let  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  be the polar coordinates defined on  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  by  $z_1 = r \cos\theta$  and  $z_2 = r \sin\theta$ , the restriction of the Liouville 1-form  $\lambda$  on  $W_0 = T^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ , is the 1-form  $\alpha_r = r(\cos\theta dx + \sin\theta dy)$ .

$\alpha_r$  induces in each hypersurface:  $r = f(x, y, \theta)$ , where  $f$  is a positive function, a contact form and all these contact forms, define the same contact structure  $\zeta_1$  on  $T^3 = \{(x, y, \theta)\}$ . The symplectization of  $(T^3, \zeta_1)$  is isomorphic to  $(W_0, \omega_0 = dz_1 \wedge dx + dz_2 \wedge dy)$ .

Moreover the Liouville vector field  $X_0 = z_1(\partial/\partial z_1) + z_2(\partial/\partial z_2)$ .

is  $\omega_0$ -dual to  $\lambda$  and can be taken gradient-like to a spsh function on  $W_0$ . Thus, by the equivalent Definitions (2.1.2) and (2.1.3),  $(T^3, \zeta_1)$  is holomorphically fillable.

Let  $p_n: T^3 \rightarrow T^3$ ,  $n = 2 \dots$  be a sequence of cyclic coverings  $(x, y, \theta) \rightarrow (x, y, n\theta)$ . Let us denote by  $\zeta_n$ ,  $n = 1 \dots$  the pullback of the contact structure  $\zeta_1$  under the covering  $p_n$ . Thus,  $\zeta_n = \{\alpha_n = 0\}$  where  $\alpha_n = p_n^* \alpha_1 = \cos(n\theta) dx + \sin(n\theta) dy$ .

All the contact structures  $\zeta_n$  are clearly tight because they all have the same universal covering: the standard contact structure on  $\mathbb{R}^3$ . Moreover, as noticed by E. Giroux in ([13]), all these structures are weakly symplectically fillable. Also E. Giroux ([13]), and independently Y. Kanda ([16]), proved the following theorem.

**Theorem 2.2.2** ([13; 16]) *the contact structures  $\zeta_n$ ,  $n = 1 \dots$  are pairwise non diffeomorphic and give the complete, up to diffeomorphism, list of positive tight contact structures on  $T^3$ .*

Furthermore Eliashberg proved in ([4]) the following theorem.

**Theorem 2.2.3** ([4]) *the contact structures  $\zeta_n$  for  $n > 1$  are not strongly symplectically fillable, and therefore not holomorphically fillable.*

Combining the Theorems (2.2.3) and (2.2.2) and the Proposition (2.2.1), Eliashberg get in ([4]) the following corollary.

**Corollary 2.2.4** ([4]) *the contact structure  $\zeta_1$  on  $T^3$  is the unique up to isotopy holomorphically fillable contact structure.*

## 3 - Proof of the main Theorem

The set  $\text{HHF}_M$  of symplectically fillable contact structures considered up to homotopy (as cooriented 2-plane fields) on a closed 3-manifold  $M$  is a subtle invariant of  $M$ . By a theorem of Eliashberg and Thurston ([7]), the cardinality of  $\text{HHF}_M$  is an upper bound for the number of homotopy classes of taut foliations on  $M$ . And in ([17]) P. Lisca proved the following.

**Proposition 3.0.5** ([17]) *let  $M$  be a closed oriented 3-manifold carrying metrics with strictly positive scalar curvature. Then,  $\lfloor H F_M \rfloor \leq \lfloor \text{Tor } H_1(M, \mathbb{Z}) \rfloor$ , where  $\text{Tor } H_1(M, \mathbb{Z})$  is the torsion subgroup of  $H_1(M, \mathbb{Z})$  and  $\lfloor \rfloor$  denotes cardinality.*

The following corollary is our direct consequence of the Propositions (2.1.6) and (3.0.5).

**Corollary 3.0.6** *let  $M$  be a closed oriented 3-manifold carrying metrics with strictly positive scalar curvature. Then,  $\lfloor H F_M \rfloor < \lfloor \text{Tor } H_1(M, \mathbb{Z}) \rfloor$ , (4) where  $H F_M$  be the number, up to isotopy, of holomorphically fillable contact structure on  $M$ .*

The 3-dimensional Heisenberg group  $\text{Nil}^3$  can be described by the group of 3 by 3 real matrices of the form (see ([2])). As a manifold it is just  $\mathbb{R}^3$ .

There are two natural isomorphic Sasakian structures on  $\text{Nil}^3$ : the **right invariant contact form**  $\alpha^R = dz - y dx$ , and the **left invariant contact form**  $\alpha^L = dz - x dy$ . These are related by the involution:

$$\iota : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ defined by } \iota(x, y, z) = (y, x, z), \text{ that is } \iota^* \alpha^L = \alpha^R.$$

Notice that  $\iota$  reverses orientation. These contact forms give rise to the **right invariant Sasakain structure**  $S^R = (Z, \alpha^R, \Phi^R, g^R)$  and the **left invariant Sasakain structure**  $S^L = (Z, \alpha^L, \Phi^L, g^L)$ , where  $Z = \partial_z$ ,

$$\Phi^R = (\partial_x + y \partial_z) \otimes dy - \partial_y \otimes dx, g^R = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz - y dx)^2,$$

and

$$\Phi^L = (\partial_y + x \partial_z) \otimes dx - \partial_x \otimes dy, g^L = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz - x dy)^2.$$

Both Sasakian structures have the same Reeb vector field. So the Heisenberg group

has what we called a **bi-Sasakian structure**. Moreover we see that

$$S^R = (\iota^{-1} * Z, \iota^* \alpha^L, \iota^{-1} * \Phi^L \iota^*, \iota^* g^L) = \iota^* S^L.$$

Thus it follows from the Definition 1.2.5, that  $S^L$  and  $S^R$  are isomorphic.

Therefore we can fix one of these structures, namely the right Sasakian structure  $S^L$  and refer to it as the **standard Sasakian or CR structure** on  $\text{Nil}^3$ . Moreover it is proved in ([2]) that:

**Proposition 3.0.7** ([2]) *Let  $M$  be a 3-dimensional compact manifold, which is diffeomorphic to a left quotient of the 3-dimensional Heisenberg group  $\text{Nil}^3$ , then the only Sasakian structure passes down to the quotient is the standard one.*

### Proof of the main Theorem (0.0.1)

Let  $M$  be a  $T^2$  - bundle over  $S^1$  with non-periodic monodromy matrix  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , satisfying  $|\text{tr } A| = 2$ . Following Geiges and Gonjalo ([11]),  $M$  is a left quotient of  $\text{Nil}^3$ . Moreover from ([2]),  $M$  is diffeomorphic to the quotient manifold formed by the subgroup  $\Gamma_k = \text{Nil}^3(\mathbb{Z}, k)$  of  $\text{Nil}^3$  obtained by restricting the real coordinates  $(x, y, z)$  in  $\text{Nil}^3$  to take values in the set of all integers divisible by the integer  $k > 0$ . Furthermore one has always following ([2]) that:

$$H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_k, \text{ with } k = 1, 2, 3. \text{ Thus } \lfloor \text{Tor } H_1(M, \mathbb{Z}) \rfloor \in \{1, 2, 3\}.$$

Since  $M$  is a Sasakian manifold then it follows from ([1]), that it carries a metric with positive scalar curvature. Then, by the above Corollary (3.0.6) we have:

$$0 < H F_M \leq 3.$$

Following the Proposition (3.0.7), the only Sasakian structure passes down to the quotient is the standard one. And by the Proposition (2.1.4) tell us that the induced Sasakian structure is holomorphically

fillable, and then by the Proposition 2.1.4, we have:

$$1 \leq HF_M \leq 3.$$

## References

[1] D. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Springer Lectures Notes in Mathematics 509(1976).

[2] C. P. Boyer, *Sasakian Geometry of the Heisenberg Group*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 52(100) No. 3(2009), 251-262.

[3] F Bogomolov, B de Oliveira, *Stein small deformations of strictly pseudoconvex surfaces*, Contemp. Math. 207(1997), 25-41

[4] Y. Eliashberg, *Unique holomorphically fillable contact structure on the 3-torus*, Internat. Math. Res. Notices (1996), 77-82.

[5] Y. Eliashberg, "Filling by holomorphic disc and its applications" in *Geometry of Low-Dimensional Manifolds 2*, London. Math. Soc. Lecture Note Ser. 151, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1990), 45-67.

[6] Y Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension  $> 4$* , International Journal of Math. 1(1990) 29-46.

[7] Y. Eliashberg and W. P. Thurston, *Confoliations*, University Lectures Series, Amer. Math. Soc. 13(1998).

[8] J. B. Etnyre, K. Honda, *On the nonexistence of tight contact structures*, Ann. of Math. (2) 153(2001), 749-766.

[9] H. Geiges, *An introduction to contact topology*. Cambridge Univ. Press, (2008).

[10] H. Geiges, F. Ding, *Symplectic fillability of tight contact structures on torus bundles*, Algebr. Geom. Topol. 1(2001) 153-172.

[11] H. Geiges and J. Gonzalo, *Contact circles on 3-manifolds*, J. Diff. Geom. 46(1997), 236-286.

[12] P. Ghiggini, *Strongly fillable contact 3-manifolds without Stein fillings*, Geo. Top. 9(2005), 1677-1687.

[13] E. Giroux, *Une structure de contact, même tendue, est plus ou moins tordue*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 27(1994), 697-705.

[14] J. W. Gray, *Some global properties of contact structures*. Ann. of Math. (2) 69(1959), 421-450.

[15] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82(1985), 307-347.

[16] Y. Kanda, *Classification of tight contact structures on  $T^3$* , preprint, 1995.

[17] P. Lisca, *Fillable contact structures up to homotopy*, Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol. 129, Number 11(2001) 3437-3444.

[18] P. Lisca, A. I. Stipsicz, *Tight, not semi-fillable contact circle bundles*, Math. Ann. 328(2004), 285-298.

[19] P. Lisca, A. I. Stipsicz, *An infinite family of tight, not semi-fillable contact three manifolds*, Geom. Topol. 7(2003), 1055-1073.

[20] G. Marinescu, P. Yeganefar, *Embeddability of some strongly pseudoconvex CR manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 359(2007), no. 10, 4757-4771. Singularities Symposium, II (1969/1970), 142-163. Lecture Notes in Math., 209, Springer, (1971).

[21] P. Popescu-Pampu, *Topologie de contact et singularités complexes*. Mémoire d'habilitation de l'Université de Paris 7 Denis Diderot Soutenu le 9 Décembre (2008).



## **SUR L'UTILITE DE LA MODELISATION ET DE L'ANALYSE ASYMPTOTIQUE**

Emmanuel Frénod<sup>1</sup>

**Résumé :** Nous montrons comment la modélisation et l'analyse asymptotique aident à comprendre des phénomènes, à tester des hypothèses et à améliorer des outils de simulation. Nous nous appuyons sur des exemples pour illustrer le propos

**Abstract.** We show how modeling and asymptotic analysis helps to understand phenomena to test hypotheses and to improve simulation tools. We illustrate this using examples.

---

<sup>1</sup> LMBA (Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique), UMR CNRS 6205, Université de Bretagne-Sud, Vannes, France.

## 1 – Introduction

La modélisation est un formidable outil pour aider à comprendre les phénomènes. La première raison de cela est que, pour atteindre son objectif, à savoir la simulation d'un phénomène donné, le modélisateur est amené à poser des questions un peu différentes de celles que se posent les scientifiques du domaine qui l'étudie habituellement. Cela aide à comprendre le paradigme servant à aborder le phénomène en question.

Une fois modélisé sous la forme d'un modèle mathématique, généralement continu ou de très grande taille, des méthodes de discrétisation permettent de construire des modèles du phénomène de taille plus petite, donc traduisibles en logiciels. Les logiciels construits permettent alors de faire des simulations du phénomène qui, via des méthodes de visualisation, peuvent être interprétées. La conséquence de telle ou telle modification des conditions du phénomène peut alors être étudiée.

D'autre part, elle permet de tester des hypothèses. Face à un phénomène incompris ou mal compris, une hypothèse peut être émise sur le fonctionnement de ce phénomène. Un modélisateur peut ensuite traduire cette hypothèse sous la forme d'un modèle qui peut alors être implémenté. A l'aide du logiciel résultant, des simulations peuvent être réalisées. Si elles sont conformes à certains aspects du phénomène, il est possible de conclure que l'hypothèse formulée n'est pas complètement irréaliste.

L'analyse asymptotique est un outil de modélisation mathématique. Elle permet de déduire des modèles à partir d'autres et de hiérarchiser les modèles décrivant un phénomène donné.

Elle permet également d'améliorer les performances de logiciels de simulation. Un logiciel de simulation, basé sur un modèle

efficace, qui fonctionne correctement dans la plupart des situations, peut s'effondrer lorsque le phénomène à simuler contient ou génère des oscillations dont la période caractéristique est très petite devant l'échelle globale du phénomène. La raison de cela est que, dans ce cas, l'espace supportant le phénomène doit être divisé en un très grand nombre de cellules, petite devant la taille caractéristique de la période d'oscillation, et donc extrêmement petite en regard de l'échelle à laquelle la simulation doit avoir lieu. Les simulations deviennent alors beaucoup trop coûteuses en temps de calcul pour être menées. Face à ce problème, des méthodes d'analyse asymptotique permettent de retirer des modèles la présence explicite des oscillations pour ne garder que leur effet moyen. Ainsi en remplaçant le modèle sur lequel est basé le logiciel par un modèle ne contenant que l'effet moyen des oscillations permet au logiciel d'aborder le phénomène, même lorsque ce dernier contient ou génère des oscillations.

## 2 - Comprendre des phénomènes

Pour réaliser une simulation, en premier lieu, il est nécessaire de disposer d'un modèle mathématique du support physique où le phénomène a lieu. Ensuite il faut utiliser ou construire un modèle mathématique du phénomène à simuler, cohérent avec le modèle du support physique. Le modèle issu du couplage de ces deux derniers doit être discrétisé avant d'être implémenté.

Un exemple de simulation est donné en figure 1, constituée d'images extraites d'un film fait par DHI. L'image en haut à gauche montre le haut d'une vallée quelques instants après la rupture d'un barrage. Sur les images suivantes, la suite de la simulation de l'écoulement vers le fond de la vallée est montrée.

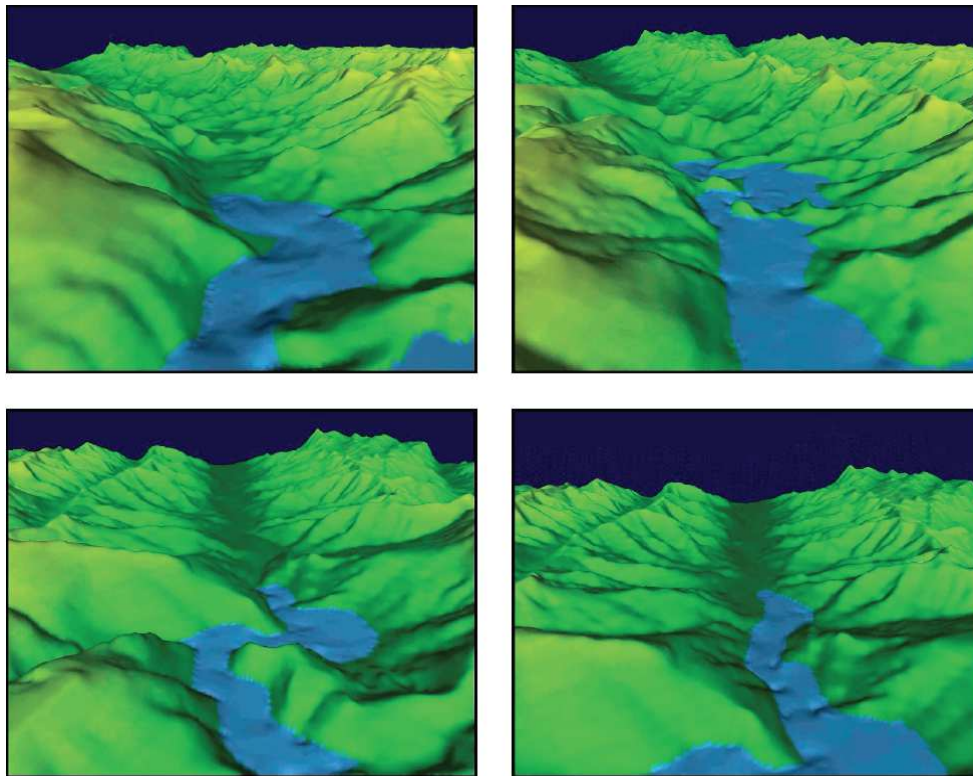


Fig. 1 – Simulation d'un écoulement d'eau dans une vallée suite à la rupture d'un barrage.  
(Extrait d'un film fait par DHI<sup>1</sup>.)

Dans cet exemple, le support physique où le phénomène à lieu est l'ensemble constitué des montagnes et de la vallée où l'écoulement se produit. Le modèle mathématique de ce support est une fonction de deux variables donnant, pour chaque point horizontal, son altitude. Le modèle mathématique du phénomène est le système d'équations aux dérivées de Saint-Venant, c.f. Saint-Venant [16], Gerbeau & Perthame [8] et Bouchut *et al.* [4] (ou Shallow-Water Equations en anglais).

Le modèle mathématique est discrétisé par une méthode de volumes finis, cf. LeVeque [13]. L'ensemble est intégré dans un logiciel commercial de bonne qualité, nommé Mike® 2D, cf. [1]

Il n'est pas utile d'argumenter longtemps pour expliquer l'intérêt pour un service public ou une collectivité publique, à proximité d'un barrage, de disposer d'un tel outil. Cela peut lui permettre de mettre au point des protocoles d'évacuation, d'étudier

la réalisation d'ouvrage d'art pour influencer l'écoulement en cas d'accident, etc. Cette démarche d'utilisation de la simulation pour comprendre les phénomènes peut être étendue à tous les problèmes liés à des phénomènes naturels, industriels, économiques, etc.

### 3 - Tester des hypothèses

L'utilisation de la modélisation afin de tester des hypothèses sera illustrée au travers du travail de recherche exposé dans Frénod & Sire [7] et qui concerne l'essaimage de la bactérie *Proteus mirabilis*, c.f. par exemple : Shapiro & Dworkin [17], Esipov & Shapiro [6], Rauprich *et al.* [15] et Matsuyama *et al.* [14].

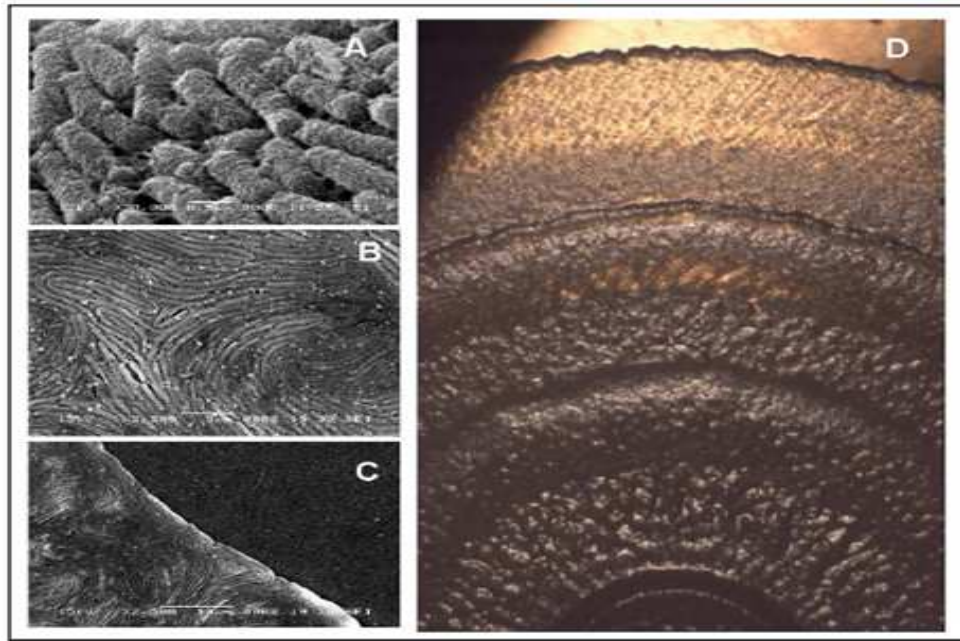


Fig. 2 – Bactéries *Proteus mirabilis* sous forme végétative (A) et sous forme différenciée (B). Front d'une colonie de bactéries *Proteus mirabilis* (C). Colonie de bactéries *Proteus mirabilis* (D). (Extrait de [7].)

Dans des conditions usuelles *proteus mirabilis* se présente sous la forme d'une cellule de quelques dixièmes de micromètres, nommée "végétative", visible sur l'image A de la figure 2. Dans certaines conditions, en particulier lorsqu'une goutte de solution contenant des bactéries est déposée sur un substrat solide, par exemple un gel d'agar dans une boîte de pétrie, certaines cellules connaissent un phénomène de différenciation. Ce phénomène est le résultat du fait que la division cellulaire ne s'accomplit pas totalement. Ainsi, au lieu de générer deux cellules filles, la cellule mère génère une cellule deux fois plus longue. En itérant ce processus, des bactéries de plusieurs dizaines de micromètres finissent par être générées. Ces bactéries, nommées "bactéries différenciées", visibles sur l'image B, sont sujettes à une oscillation individuelle qui peut provoquer un mouvement collectif de la colonie de bactéries. L'image C montre le front d'une colonie de bactéries. La partie droite (sombre) est le milieu non encore colonisé et la partie gauche est le front de la colonie, majoritairement constitué de bactéries différenciées, qui progressent vers la droite.

Ce phénomène d'essaimage ne se produit pas de manière continue dans le temps, mais des phases pendant lesquelles seules des bactéries sous forme végétative sont présentes et pendant lesquelles aucun mouvement de la colonie n'est perceptible, des phases sans mouvement de la colonie pendant lesquelles les bactéries s'allongent, des phases d'essaimage, et des phases pendant lesquelles les bactéries différenciées se transforment en cellule végétative par achèvement de la division cellulaire alternent de façon plus ou moins périodique. Du fait de cette alternance de phases, une fois la colonisation achevée, la colonie de bactéries présente une variation d'épaisseur visible sur l'image D. Cette variation d'épaisseurs est connue sous le nom de "phénomène de terrassement".

Depuis sa découverte par Hauser [9], à la fin du XIX<sup>ième</sup> siècle, ce phénomène a été beaucoup étudié. La première raison de cela est médicale. En effet, *Proteus mirabilis* est un agent pathogène des reins et des voies urinaires, fréquemment impliqué dans les infections urinaires. Ainsi, comprendre son mode de colonisation a une importance pour lutter contre ces infections. La

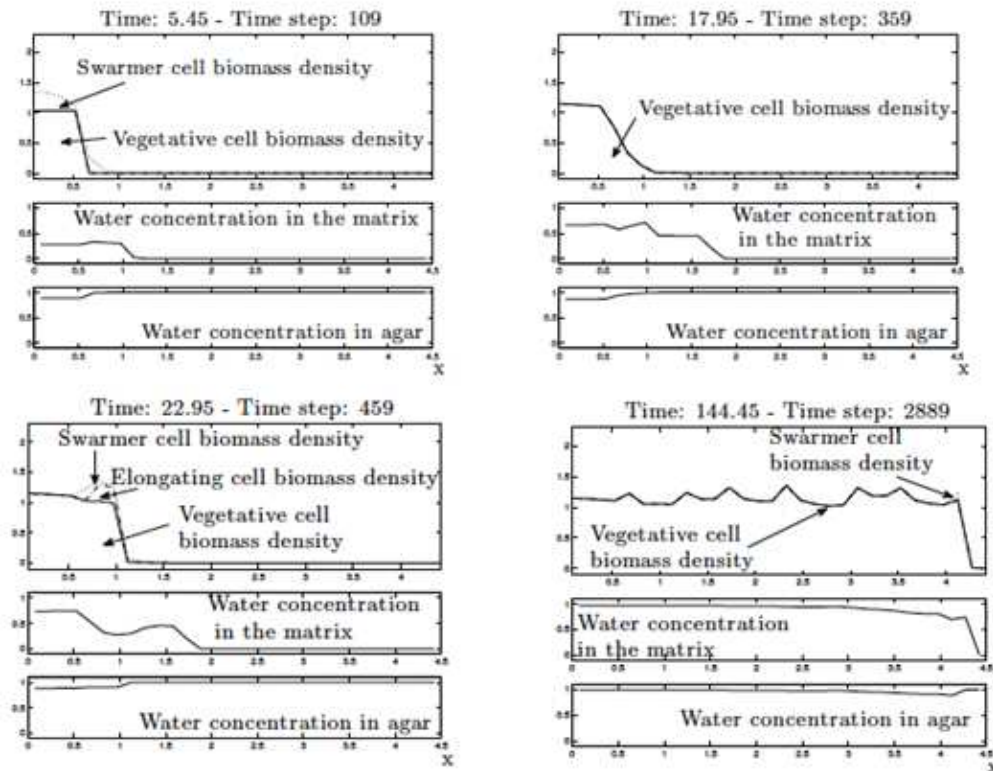


Fig. 3 – Simulation d'un essaimage de bactéries *Proteus mirabilis*. (Extrait de [7].)

deuxième raison est que, les bactéries qui sont unicellulaires présentent, dans ce phénomène d'essaimage, un comportement collectif. Une colonie de bactéries *Proteus mirabilis* semble donc être un chaînon intermédiaire entre les règnes de la vie unicellulaire et ceux de la vie pluri-cellulaire. Ainsi comprendre le phénomène de l'essaimage de *Proteus mirabilis* peut contribuer à apporter des réponses concernant les mécanismes de l'émergence de la vie pluri-cellulaire. La troisième raison de la forte mobilisation de la communauté scientifique sur ce phénomène est la fascination qu'exercent les systèmes extrêmement simples qui génèrent des formes complexes, régulières, ou esthétiques. C'est le même type de fascination qui a induit les efforts de recherche mathématique dans les domaines des fractals ou de la morphogénèse.

L'étude de ce phénomène à beaucoup portée sur les aspects biologiques et biochimiques mais assez peu de travaux portent sur les phénomènes biophysiques sur lesquels l'essaimage s'appuie. Assez

récemment plusieurs travaux, cf. Lahaye *et al.* [12, 11], Keirsse *et al* [10], Berg [3] et Chen *et al.* [5], ont mis en évidence que la concentration en eau de la matrice dans laquelle la colonie des bactéries baigne jouait un rôle biophysique important dans le phénomène d'essaimage. Cependant, certains aspects du phénomène d'essaimage restaient mal expliqués. En particulier, le fait que la phase d'essaimage prenne fin alors que de nombreuses bactéries différenciées sont encore présentes dans le front semblait assez obscur.

Dans Frenod & Sire [7], l'hypothèse suivante a été émise : Lorsque la matrice est peu hydratée il y a en son sein des quasi-cristaux. Le mouvement d'oscillation individuel des bactéries en s'appuyant sur ces quasi-cristaux génère le mouvement collectif de la colonie. En revanche lorsque la matrice est hydratée, il n'y a pas de quasi-cristaux et le mouvement d'oscillation individuel des bactéries ne génère pas de mouvement collectif.

Cette hypothèse a ensuite été traduite en un modèle fait de cinq équations : une équation intégro-différentielle modélisant l'évolution de la densité des bactéries végétatives en chaque point ; une équation aux dérivées partielles modélisant la population, structurée en âge de bactéries en phase d'élongation, en chaque point ; une équation aux dérivées partielles décrivant l'évolution de la population structurée en âge des bactéries différenciées (capables de migrer) sur l'ensemble du domaine ; une équation aux dérivées partielles modélisant l'évolution de l'hydratation de la matrice extracellulaire ; et, une équation différentielle ordinaire décrivant, en chaque point, l'évolution de la concentration en eau dans le gel d'agar.

Ce modèle a été discrétisé, puis implémenté dans l'environnement Matlab® 7. La simulation dont la figure 3 donne un extrait montre que, quelques instants après qu'une goutte d'eau contenant des bactéries ait été posée sur le gel d'agar, des bactéries différenciées apparaissent et commencent à essaimer car l'hydratation de la matrice est faible (cf. image en haut à gauche).

Du fait la réhydratation de la matrice, l'essaimage s'interrompt puis les bactéries différenciées se dé-différencient pour donner des bactéries végétatives (cf. image en haut à droite).

Ensuite le phénomène reprend (cf. image en bas à gauche). A la fin du processus (cf. image en bas à droite) l'ensemble du milieu est colonisé et la colonie présente des variations d'épaisseurs rappelant le phénomène de terrassement.

La conclusion de ce travail est que l'hypothèse émise ci-dessus est crédible.

#### 4 - Améliorer les outils de simulation

L'utilisation de l'analyse asymptotique, qui est un outil de modélisation, afin d'améliorer les outils de simulation s'appuiera sur le travail exposé dans Ailliot, Frénod & Monbet [2].

La courbe continue de la figure 4 est la trajectoire, sur un intervalle de temps de quelques semaines, d'un objet partiellement immergé dans l'océan, à proximité des côtes. Cette trajectoire est la conséquence de l'action conjuguée de la marée, imprimant l'oscillation rapide, et du vent, imprimant des variations lentes. Pour simuler cette trajectoire par une méthode numérique classique, il est nécessaire d'utiliser un pas de temps notablement plus petit que la période de l'oscillation principale, à savoir la période de la marée. Cela rend la simulation coûteuse en temps de calcul.

Dans la suite  $\varepsilon$  désigne un petit paramètre qui est, essentiellement, le rapport entre la période de marée et la longueur de l'intervalle de temps pendant lequel la trajectoire est observée. En décomposant le champs de vitesse de l'eau en un terme exclusivement dû à la marée  $\mathbf{M}(t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X})$ , qui est périodique de période la période de la marée et d'amplitude modulée par le temps  $t$  et la position  $\mathbf{X}$ , et une perturbation  $\varepsilon \mathbf{N}(t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X})$  due aux autres facteurs, c'est à dire en écrivant cette vitesse  $\mathbf{M}(t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X}) + \varepsilon \mathbf{N}(t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X})$ , la trajectoire adimensionnée  $\mathbf{X}(t)$  de l'objet est solution du système suivant :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} (t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} (t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \theta} (t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X}) + (\nabla \mathbf{M}(t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X})) \mathbf{V} + \\ & \mathbf{W}(t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{x}) - \mathbf{V} + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} (t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{X}) + (\nabla \mathbf{N}(t, \frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{x})) \mathbf{V} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

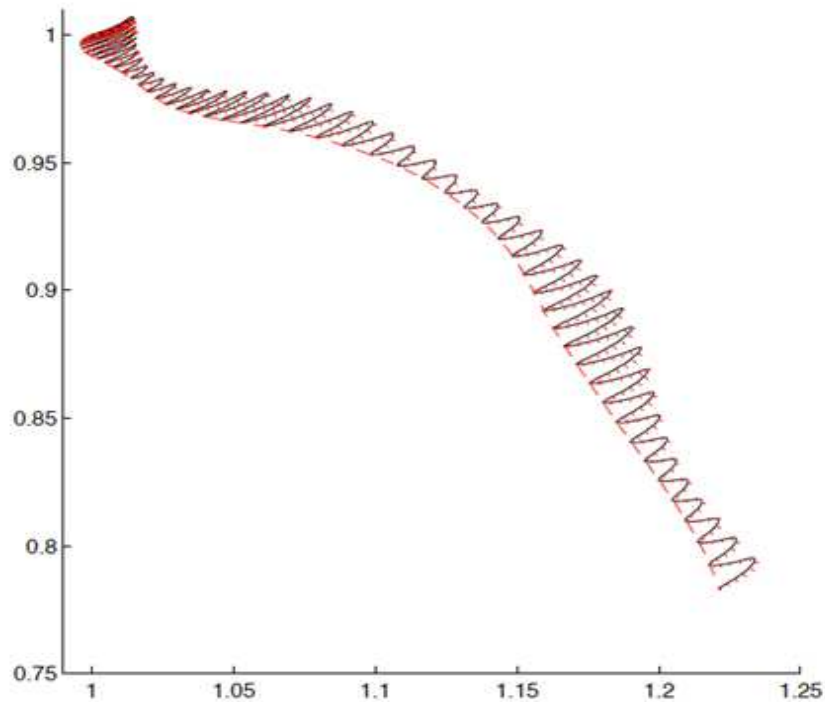


Fig. 4 – Courbe continue :  $X$  Courbe en tirets :  $Y^0(t)+\epsilon Y^1(t)$ .  
 Courbe en pointillés :  $Y^0(t)+\epsilon Y^1(t) + o(\frac{t}{\epsilon})$ . (Extrait de [2].)

La première équation dit simplement que la dérivée de la position de l'objet est sa vitesse. La seconde dit que son accélération est celle de l'océan constituée des termes du membre de droite de la première et de la troisième ligne, auxquels s'ajoute la force exercée par le vent qui est proportionnelle à la différence entre la vitesse du vent  $W(t, \frac{t}{\epsilon}, X)$  et la vitesse de l'objet. Le fait que pour simuler cette équation il faille utiliser un pas de temps très petit devant  $\epsilon$  est matérialisé par la présence du facteur  $\frac{t}{\epsilon}$  dans la seconde équation.

Ce qui est démontré dans Ailliot, Frenod & Monbet [2] c'est que  $x(t)$  peut se développer asymptotiquement sous la forme :

$$X(t)=Y^0(t)+\epsilon Y^1(t)+ o(\frac{t}{\epsilon}) + \dots ,$$

Et que  $V(t)$  se développe également de la façon suivante :

$$V(t)=V^0(t, \frac{t}{\epsilon}) + \epsilon V^1(t, \frac{t}{\epsilon}) + \dots ,$$

Où  $o$  est une fonction donnée explicitement. D'autre part les équations vérifiées par  $Y^0(t)$ ,  $Y^1(t)$ ,  $V^0(t, \theta)$  et  $V^1(t, \theta)$  sont établies. Ces dernières ne contiennent ni ne génèrent d'oscillation à haute fréquence, ainsi elles peuvent être simulées à un coût en temps inférieur à celui nécessaire pour simuler (1)-(2).

Un regard sur la figure 4 montre la qualité de l'approximation. En effet la courbe en tirets représente  $Y^0 + \epsilon Y^1$  et clairement elle reste très proche de la tendance de  $X$ . De plus si la trajectoire est reconstituée en effectuant  $Y^0(t)+\epsilon Y^1(t)+ o(\frac{t}{\epsilon})$ , qui est matérialisée par la courbe en pointillés, la superposition avec  $X$  est très bonne.

Ainsi, remplacer la résolution de (1)-(2) par celle du système satisfait par  $Y^0(t)$ ,  $Y^1(t)$ ,  $V^0(t, \theta)$  et  $V^1(t, \theta)$  en la couplant à la reconstitution  $Y^0(t)+\epsilon Y^1(t)+ o(\frac{t}{\epsilon})$ , permet de réduire le coût de calcul sans nuire à la précision du résultat

## Références

- [1] Mike 21hd-Flow Model-Scientific Documentation. Technical Report, Danish hydraulic Institute, 2006.
- [2] P. Ailliot, E. Frenod, and V. Monbet. Long term object drift forecast in the ocean with tide and wind. *Multiscale Model. Simul.* 5(2):514-531, 2006.
- [3] H. C. Berg. Swarming motility: it better be wet. *Curr.Biol.*, 15:R599-600, 2005.
- [4] F. Bouchut, A. Mangeney-Castelnaud, B. Perthame, and J. P. Vilotte. A new model of Saint Venant Savage-Hutter type of gravity driven shallow water flow. *C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I*, 336:531-536, 2003.
- [5] B. G. Chen, L. Turner, and H. C. Berg. The waiting agent required for swarming in *Salmonella enteric* serovar tiphimurium is not a surfactant. *J. Bact.*, 189:8750-8753, 2007.
- [6] S. E. Esipov and J. A. Shapiro. Kinetic model of proteus mirabilis swarm colony development. *J.Math.Biol.* 36: 249-268, 1998.
- [7] E. Frenod and O. Sire. An explanatory model to validate the way water activity rules periodic terrace generation in *proteus mirabilis* swarm. *J.Math.Biol.*, 59(4):439-467, 2009.
- [8] J.F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1:89-102, 2001.
- [9] G. Hauser. *Über Fauslnisbakterien und deren Beziehung zur Septicämie* FGW Vogel Leipzig Germany, 1985.
- [10] J. Keirsse, E. Lahaye, A. Bouter, V. Dupont, C. Boussard-Plédel, B. Bureau, J. L. Adam, V. Monbet, and O. Sire. Mapping bacterial surface population physiology in real-time: Infrared spectroscopy of *proteus mirabilis* swarm colonies. *Appl.Spectrosc.* 60:584-591, 2006.
- [11] E. Lahaye, T. Aubry, V. Fleury, and O. Sire. Does water activity rule *P.mirabilis* periodic swarming? II. Viscoelasticity and water balance during swarming. *Biomacromolecules*, 8:1228-1235, 2007.
- [12] E. Lahaye, T. Aubry, N. Kervarec, P. Douzenel and O. Sire. Does water activity rule *P.mirabilis* periodic swarming? I. Biochemical and functional properties of the extracellular matrix. *Biomacromolecules*, 8:1218-1227, 2007.
- [13] R. J. Leveque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University press 2002.
- [14] T. Matsuyama, Y. Takagi, Y. Nakagawa, H. Itoh, J. Matsuyama, and M. Wakita. Dynamic aspects of the structured cell population in a swarming colony of *proteus mirabilis*. *J. Bact.* 182:385-393, 2000.
- [15] O. Rauprich, M. Matsuchita, C. J. Weijer, F. Siegert, S. E. Esipov, and J. A. Shapiro. Periodic phenomena in *proteus mirabilis* swarm colony development. *J. Bact.* 178:6525-6538, 1996.
- [16] A. J. C. Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 73 :147-154 ,1871.
- [17] J. A. Shapiro and M. Dworkin, editors. *Bacteria as Multicellular Organisms*. Oxford University Press, 1997.



SUR LES FEUILLETAGES  
TRANSVERSALEMENT PROJECTIFS DES  
FIBRES PSEUDO-ANOSOV

Hamidou DATHE<sup>1</sup> et Adamou SAIDOU<sup>2</sup>

**Abstract.**

We classify transversely projective foliation without compact leaf on pseudo-Anosov bundle under some restrictions on the global holonomy group.

**Résumé.**

On décrit tous les feuilletages transversalement projectifs sans feuille compacte avec une holonomie globale d'un certain type sur certains fibrés pseudo-Anosov.

**Mots clés:** feuilletages, fibrés, groupe d'holonomie globale

---

<sup>1</sup> Université Cheikh Anta Diop de Dakar , Faculté des Sciences et Techniques, Département de Mathématiques et Informatique email : hamidou.dathe@yahoo.fr

<sup>2</sup> Université de Maradi (Niger) Département de Mathématiques et Informatique et Informatique, email : adamou\_aka@yahoo.fr

### 1. Introduction

Soit  $\psi$  un difféomorphisme d'Anosov du tore  $T^2$  induit par une matrice  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  avec  $trA > 2$ . E. Ghys et V. Sergiescu (voir[1]) ont construit la 3-variété obtenue par suspension de  $\psi$  et ont classifié tous les feuilletages sans feuille compacte de codimension 1 et de classe  $C^r (r \geq 2)$ .

Considérons la surface fermée  $\Sigma$  de genre  $g \geq 2$  et soit  $\varphi$  un difféomorphisme pseudo-Anosov de  $\Sigma$ . En suspendant  $\varphi$  on obtient une 3-variété  $V$  appelée fibré pseudo-Anosov.

Contrairement à  $\mathbb{T}_A^3$ , il n'existe pas à notre connaissance un théorème de classification complète des feuilletages de codimension 1 sans feuille compacte sur  $V$ . Il existe plusieurs résultats partiels dans cette direction. Par exemple H. Nakayama (voir[2]) a classifié à revêtement près tous les feuilletages transversalement affins sans feuille compacte dans la classe d'Euler de la fibration.

H. Dathe (voir[3]) a montré que tous les feuilletages transversalement projectifs suffisamment proches d'un modèle sont conjugués à ce modèle.

Dans cet article on classifie tous les feuilletages transversalement projectifs sans feuille compacte sur  $V$  qui sont dans la classe d'Euler de la fibration et sous certaines restrictions sur le groupe d'holonomie globale.

### 2. Feuilletages sans feuille compacte sur $\mathbb{T}_A^3$

#### 2.1 Construction de $\mathbb{T}_A^3$

Soit  $\psi : T^2 \rightarrow T^2$  un difféomorphisme d'Anosov du tore  $T^2$  induit par une matrice hyperbolique

$$A \text{ (i.e } A \in SL(2, \mathbb{Z}) \text{ et } trA > 2).$$

On construit la 3-variété suspension de  $\psi$  par :

$$\mathbb{T}_A^3 = T^2 \times I / (x, 0) \sim (\psi(x), 1)$$

où  $I = [0, 1]$ . Cette variété est un fibré en tores sur le cercle appelé fibré Anosov.

#### 2.2 Feuilletages modèles sur $\mathbb{T}_A^3$

La matrice  $A$  possède deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\frac{1}{\lambda}$ . Les feuilletages de  $\mathbb{R}^2$  par droites de pente  $\lambda$  et  $\frac{1}{\lambda}$  sont invariants par l'action de  $\mathbb{Z}^2$  et induisent sur le tore  $T^2$  deux feuilletages invariants par  $\psi$ . En suspendant les deux feuilletages obtenus sur le tore  $T^2$  on obtient sur  $\mathbb{T}_A^3$  deux feuilletages minimaux que nous appelons feuilletages modèles.

#### 2.3 Classification

E. Ghys et V. Sergiescu [1] ont classifié tous les feuilletages sans feuille compacte de codimension 1 et de classe  $C^r (r \geq 2)$  sur  $\mathbb{T}_A^3$ . Leur résultat est le suivant :

**Théorème 1.** [1] *Tout feuilletage sans feuille compacte de codimension 1 et transversalement orientable de classe  $C^r (r \geq 2)$  sur un fibré hyperbolique orientable de genre 1 est  $C^{r-2}$ -conjugué à l'un des modèles.*

### 3. Feuilletages sans feuille compacte sur les fibrés pseudo-Anosov

#### 3.1. Feuilletages modèles

Soit  $\Sigma$  une surface fermée de genre  $g > 1$  et  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  un difféomorphisme.

**Définition 1.** *Le difféomorphisme  $\varphi$  est dit pseudo-Anosov à 4 branches s'il existe deux feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sur  $\Sigma$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i)  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont transversalement orientés et mesurés.  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont singuliers avec des singularités qui sont des selles à quatre séparatrices, ils ont le même ensemble singulier  $K$  et transverses sur  $\Sigma \setminus K$ .
- (ii) Il existe une constante  $\lambda > 1$  telle que :

$$\varphi_*(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s)$$

$$\varphi_*(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u)$$

Les feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont appelés respectivement le feuilletage stable et le feuilletage instable de  $\varphi$  et  $\lambda$  est le coefficient de  $\varphi$ .

**Exemple 1.** Toute surface orientable fermée  $\Sigma$  de genre  $g > 1$  est l'espace total d'un revêtement ramifié à deux feuillets sur le tore  $T^2$  avec un lieu de ramification  $K$  tel que  $\text{card}K = 2g - 2$ .

En effet perçons le tore  $T^2$  en  $n = \text{card}K$  points ; cette variété ouverte se rétracte sur un bouquet de  $n + 1$  cercle  $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ , où les  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  entourent chacun un trou et que  $\xi_n$  et  $\xi_{n+1}$  engendrent  $\pi_1(T^2)$ . Le dernier trou noté  $\infty$  est homologiquement

entouré par  $[\xi_1] + \dots + [\xi_{n-1}]$ . On construit le revêtement associé à l'homomorphisme  $\pi_1(T^2 \setminus K) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  qui envoie  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  sur 1 et qui prend n'importe quelle valeur sur  $\xi_n$  et  $\xi_{n+1}$ . Ainsi la compactification donne un revêtement ramifié en chaque point de  $K, p : \Sigma \rightarrow T^2$ .

Soit  $\varphi$  un Anosov linéaire de  $T^2$  qui est l'identité sur  $K$  et qui se relève en  $\psi$  sur  $\Sigma$ . Le feuilletage stable est transversalement orientable et ses singularités ont 4 branches. Donc  $\psi$  est pseudo-Anosov et le feuilletage stable est défini comme un feuilletage mesuré par une 1-forme  $\omega_s$  telle que  $\psi_* \omega_s = \lambda \omega_s (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1)$ . De même on a  $\psi_* \omega_u = \lambda^{-1} \omega_u$  où  $\omega_u$  définit le feuilletage instable de  $\psi$ .

Soit  $V$  le  $\Sigma$ -fibré sur  $S^1$  de monodromie pseudo-Anosov  $\psi$  et  $\omega_s$  et  $\omega_u$  les 1-formes fermées définissant respectivement le feuilletage stable et le feuilletage instable de  $\psi$  et  $\lambda$  le coefficient de dilatation de  $\psi$ . Passons à la suspension du feuilletage stable et du feuilletage instable de  $\psi$ .

Sur  $\Sigma \times I$ , on considère la 1-forme  $\Omega_\sigma = \lambda^{\varepsilon(\sigma)t} \omega_\sigma + dt$ , avec  $\sigma = s$  ou  $\sigma = u$  et  $\varepsilon(\sigma) = 1$  si  $\sigma = s$  et  $-1$  si  $\sigma = u$ . La 1-forme  $\Omega_\sigma$  définit un feuilletage  $\mathcal{H}^\sigma$

sur  $V$  ayant un nombre fini de cercles de contact  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  avec la fibration de  $V$  sur  $S^1$ . Chaque cercle  $\gamma_i$  possède un voisinage tubulaire  $V^i$  feuilleté comme dans la figure 1.

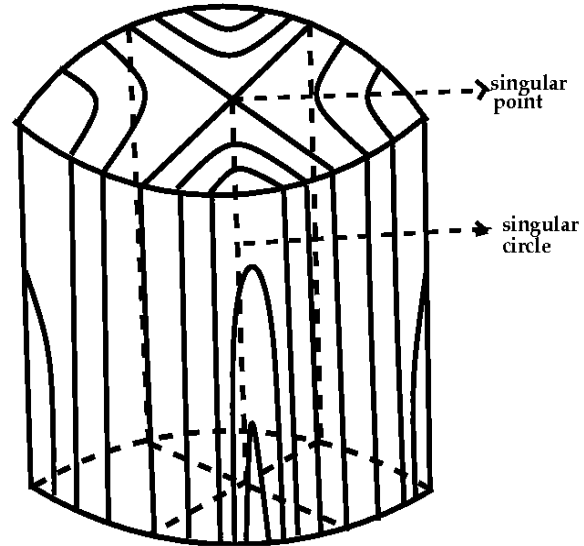


Figure 1. Voisinage tubulaire  $V^i$

Découpons les  $V^i$ , on obtient une 3-variété compacte  $M$  et  $\mathcal{H}^\sigma$  induit sur le bord de  $M$  quatre composantes de Reeb planes  $R_i^j, j = 1, \dots, 4$  qui sont deux à deux parallèles. On remplace  $V^i$  par un voisinage  $U^i$  muni d'un feuilletage obtenu en ouvrant  $V^i$  suivant  $\gamma_i$  et recollant chaque feuille de  $R_i^j$  avec une feuille de la face opposée. Ce procédé est la désingularisation.

En effet soit  $S$  l'ensemble singulier (fini) commun à  $\omega_s$  et  $\omega_u$  ; sur  $(\Sigma - S) \times \mathbb{R}$ , les 1-formes  $\lambda^t \omega_s + dt$  et  $\lambda^{-t} \omega_u + dt$  définissent deux feuilletages non singuliers  $\mathcal{H}^s$  et  $\mathcal{H}^u$  sur  $V - S$  avec  $S = \cup \gamma_i$  qui ont même classe d'Euler que la fibration. Le voisinage  $V^i$  de chaque  $\gamma_i$  est remplacé par un voisinage  $W^i$  muni du feuilletage  $\mathcal{V}^\sigma (\sigma = s, u)$  comme dans la figure 2.

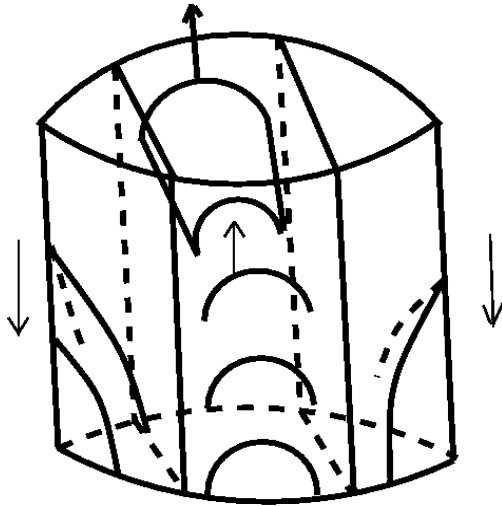


Figure 2. Voisinage tubulaire  $(W^i, \mathcal{V}^\sigma)$

Le feuilletage  $\mathcal{H}^\sigma$  s'étend en un feuilletage transversalement affine  $\mathcal{F}^\sigma$  sur  $V$  de même classe d'Euler que la fibration. Nous appelons ces feuilletages les feuilletages modèles (positifs) de  $V$ . Il est aussi possible de construire des modèles (négatifs) sur  $V$  de classe d'Euler opposée à celle de la fibration.

En effet considérons une fibre  $\Sigma$  de la fibration  $\pi$  en position optimale par rapport au feuilletage  $\mathcal{F}^\sigma$  (c'est à dire transverse au feuilletage sauf en un nombre fini de points qui sont des singularités de type selle à 4 branches). L'orientation transverse du feuilletage  $\mathcal{F}^\sigma$  est donnée par l'orientation positive des formes  $\Omega_\sigma$ . On dira qu'une singularité  $s$  est positive si l'orientation du fibré tangent  $T\mathcal{F}^\sigma$  de  $\mathcal{F}$  est la même que celle de l'espace tangent à la fibre en  $s$  et négative si elles sont opposées. Donc les singularités sont soit toutes positives ou toutes négatives. D'après[3] si toutes les singularités sont positives alors les deux classes sont les mêmes et opposées sinon. Les modèles que nous avons construits ont tous des singularités positives, et donc ont même classe d'Euler que la fibration. .

### 3.1.1 Feuilletages transversalement affines et feuilletages transversalement projectifs

On rappelle qu'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 transversalement orientable sur une variété  $M$  est transversalement affine s'il existe un couple  $(\omega, \omega_1)$  de 1 - f ormes vérifiant :

- $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ .
- $d\omega_1 = 0$
- le feuilletage  $\mathcal{F}$  est défini par  $\omega$ .

Un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 transversalement orientable sur une variété  $M$  est transversalement projectif s'il existe un triplet  $(\omega, \omega_1, \omega_2)$  de 1 - f ormes vérifiant :

- $d\omega = 2\omega_1 \wedge \omega$
- $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$
- $d\omega_2 = 2\omega_2 \wedge \omega_1$
- le feuilletage  $\mathcal{F}$  est défini par  $\omega$

Soient  $F$  un feuilletage transversalement affine sur un fibré pseudo-Anosov  $V$  et  $p : \tilde{V} \rightarrow V$  le revêtement universel de  $V$  alors d'après le théorème de développement d'un feuilletage transversalement homogène (voir [4]) il existe une représentation

$\rho : \pi_1(V) \rightarrow Aff^+ \mathbb{R}$  (où  $Aff^+ \mathbb{R}$  est le groupe affine préservant l'orientation de la droite réelle) et une submersion  $D : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$  appelée application développante telles que :

- le feuilletage  $p^*\mathcal{F}$  est défini par la submersion  $D$  ;
- $D$  est équivariante par rapport à  $\rho$  c'est-à-dire que  $D(\gamma x) = \rho(\gamma)D(x)$  avec  $\gamma \in \pi_1(V)$  et  $x \in \tilde{V}$ .

Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement projectif sur  $V$  et  $p : \tilde{V} \rightarrow V$  le revêtement universel de  $V$ . Alors, comme précédemment, il existe une représentation  $\rho : \pi_1(V) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  une submersion  $D : \tilde{V} \rightarrow S^1$  appelée application développante telles que :

- 1) Le feuilletage  $p^*\mathcal{F}$  est défini par la submersion  $D$  ;

- 2)  $D$  est équivariante par rapport à  $\rho$  i.e  $D(\gamma x) = \rho(\gamma)D(x)$  avec  $\gamma \in \pi_1(V)$  et  $x \in \tilde{V}$ .

### 3.2 Classification

L'un des premiers résultats de classification de feuilletage sur les fibrés pseudo-Anosov est le théorème de Nakayama (voir[2]) suivant :

**Théorème 2.** [2] Soit  $\Sigma$  une surface fermée orienté de genre  $g > 1$  et  $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  un  $\Sigma$ -fibré pseudo-Anosov. On suppose que la matrice de monodromie possède deux valeurs propres  $\lambda$  et  $1/\lambda$  avec des sous-espaces propres associés de dimension 1, où  $\lambda > 1$  est le coefficient de dilatation de  $M$ . Soit  $F$  un feuilletage transversalement affine de codimension 1 sans feuille compacte vérifiant  $\chi(T F) = \pm \chi(T \pi)$ ;  $\chi(T F)$  et  $\chi(T \pi)$  désignent respectivement les classes d'Euler de  $F$  et  $\pi$ . Alors il existe un revêtement fini de  $F$  qui est  $C^0$ -isotope à un feuilletage suspension d'un difféomorphisme pseudo-Anosov.

H. Dathe a montré le résultat suivant sur un fibré pseudo-Anosov particulier noté  $V_\varphi^3$  dont la monodromie  $\varphi$  est obtenue par revêtement ramifié :

**Théorème 3.** [3] Les feuilletages modèles sur  $V_\varphi^3$  n'admettent pas de perturbation transversalement projective non affine.

Il déduit de ceci le corollaire suivant :

**Corollaire 1.** [3] Tout feuilletage transversalement projectif sur  $V_\varphi^3$  suffisamment proche d'un modèle est conjugué à ce modèle.

Il pose enfin la question suivante :

#### Question :

[3] Tout feuilletage transversalement projectif sans feuille compacte et ayant » même classe d'Euler qu'un modèle sur  $V_\varphi^3$  est-il conjugué à ce modèle ?

Dans le théorème suivant on répond partiellement à cette question dans le cas beaucoup plus général des fibrés pseudo-Anosov vérifiant les hypothèses du théorème de Nakayama et sous certaines restrictions sur le groupe d'holonomie globale.

**Théorème 4.** Soient  $V$  un fibré pseudo-Anosov et  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement projectif sans feuille compacte sur  $V$  dans la même classe d'Euler que la fibration et dont le groupe d'holonomie globale ne contient aucun sous-groupe libre non abélien.

On suppose que la matrice de monodromie possède des valeurs propres réelles  $\lambda$  et  $1/\lambda$  avec des sous-espaces propres associés de dimension 1, où  $\lambda > 1$  est le coefficient de dilatation de  $M$ . Alors le feuilletage  $\mathcal{F}$  est, à un revêtement fini près,  $C^0$ -isotope à l'un des modèles.

### 3.3 Démonstration du théorème 4

#### 3.3.1 Classification des homographies de $S^1$

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R})$

et  $\varphi : x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$  l'application de  $S^1$  dans  $S^1$  correspondante. Alors :

- Si  $|trA| > 2$ ,  $\varphi$  est conjuguée dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  à une homothétie  $h(x) = \lambda^2 x$  où  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , l'autre valeur propre étant  $1/\lambda$ , dans ce cas  $\varphi$  fixe deux points de  $S^1$  et est dit hyperbolique.

- Si  $|trA| = 2$  alors  $\varphi$  est conjuguée dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  à une translation  $t_\alpha(x) = x + \alpha$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dans ce cas  $\varphi$  fixe un seul point de  $S^1$  et est dit parabolique.

- Si  $|trA| < 2$  alors  $\varphi$  est conjuguée dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  à une rotation  $r_\theta = \frac{\cos\theta x - \sin\theta}{\sin\theta x + \cos\theta}$   $\theta \in ]0, 2\pi[$ , dans ce cas  $\varphi$  ne fixe aucun point du cercle et est dit elliptique.

### 3.3.2 Décomposition d'Iwasawa de $PSL(2, \mathbb{R})$

On désigne par  $SL(2, \mathbb{R})$  le groupe des matrices à coefficients réels de déterminant 1 et  $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\}$ .  $SL(2, \mathbb{R})$  admet la décomposition d'Iwasawa suivante :

Si nous posons  $K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$ ,  $A = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} \mid r > 0 \right\}$  et  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ , alors  $SL(2, \mathbb{R}) = KAN$  est la décomposition d'Iwasawa de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Nous pouvons donc déduire qu'à  $\varepsilon$  près avec  $\varepsilon = \pm 1$  que  $PSL(2, \mathbb{R})$  admet la même décomposition que  $SL(2, \mathbb{R})$  i.e  $PSL(2, \mathbb{R}) = KAN$ .

Nous commençons par démontrer la proposition suivante :

**Proposition 1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement projectif sans feuille compacte sur une variété compacte  $V$ .*

*Soient  $\rho : \pi_1(V) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  le morphisme d'holonomie globale de  $\mathcal{F}$  et  $\Gamma = \rho(\pi_1(V))$  le groupe d'holonomie globale  $\mathcal{F}$ . Si  $\Gamma$  ne contient aucun sous-groupe libre non abélien alors  $\mathcal{F}$  est transversalement affine.*

Pour la preuve de la proposition nous avons besoin de la proposition suivante :

**Proposition 2.** [6] *Si  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $PSL(2, \mathbb{R})$  qui ne contient aucun sous-groupe libre non abélien alors on a l'une des trois situations suivantes :*

- 1)  $\Gamma$  est conjugué dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  à un sous-groupe du groupe de rotations  $SO(2)$ .
- 2)  $\Gamma$  est constitué d'éléments hyperboliques ayant le même ensemble de points fixes et des éléments elliptiques laissant cet ensemble invariant.

- 3)  $\Gamma$  est conjugué dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  à un sous-groupe du groupe affine  $Aff^+ \mathbb{R} = Stab(\infty)$ .

Nous utiliserons les résultats suivants pour montrer cette proposition :

**Lemme 1.** [7] *Soit  $H$  un sous-groupe résoluble de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , alors :*

- a)  $H$  est conjugué à un sous-groupe à un paramètre de  $K$  de  $AN = Aff^+(\mathbb{R})$  ou de  $N(A) = \langle A, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$  le normalisateur de  $A$  dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ .
- b) Si  $H$  est discret non trivial alors il est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et est alors conjugué à un sous-groupe de  $K, A, N$  ou  $N(A)$ .

**Lemme 2.** [8] *Un sous-groupe  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  qui n'est pas résoluble contient un sous-groupe libre non abélien.*

#### Preuve de la proposition 2

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $PSL(2, \mathbb{R})$  qui ne contient aucun sous-groupe libre non abélien.

Alors  $\Gamma$  est résoluble d'après le lemme 2. Or on sait d'après le lemme 1 qu'un sous-groupe résoluble de  $PSL(2, \mathbb{R})$  est conjugué à un sous-groupe de  $K$ , de  $Aff^+(\mathbb{R})$  ou à un sous-groupe de  $N(A)$ . Notons que si  $\Gamma$  est abélien alors il ne contient pas de sous-groupe libre non abélien. Or tout sous-groupe abélien de  $PSL(2, \mathbb{R})$  est conjugué à un sous-groupe de  $K, A$  ou  $N$  et donc à un sous-groupe de  $SO(2)$  ou à un sous-groupe de  $Aff^+(\mathbb{R})$ . On a donc montré le 1) et le 3) de la proposition. Pour la suite nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.** [8] *Soit  $G = PSL(2, \mathbb{R})$  et  $g, h \in G - \{1\}$  tels qu'ils n'aient aucun point fixe en commun sur  $\mathbb{S}^1$ . Alors le groupe  $\Gamma$  engendré par  $g$  et  $h$  contient un sous-groupe libre non abélien sauf les deux cas exceptionnels suivants :*

$$Si g^2 = h^2 = 1,$$

Si un élément disons  $g^2 = 1$  quand  $h$  est hyperbolique, et quand  $g$  échange les deux points fixes de  $h$  sur  $S^1$ .

Dans ces cas,  $\Gamma$  est le groupe dihedral infini et donc est résoluble.

**Suite de la preuve de la proposition 2**

Le groupe,  $N(A) = \langle A, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$  est engendré par des éléments conjugués à des éléments hyperboliques et du générateur  $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  qui est conjugué à un élément elliptique et vérifie  $g^2 = 1$ . Donc on peut trouver un élément hyperbolique  $h$  tel que  $g$  change les points fixes de  $h$ . Dans ce cas le sous-groupe de  $N(A)$  engendré par  $h$  et  $g$  ne contient aucun sous-groupe libre non abélien d'après le deuxième cas exceptionnel du lemme précédent. Ce sous-groupe est constitué d'éléments hyperboliques ayant le même ensemble de points fixes et d'éléments elliptiques laissant cet ensemble invariant, ce qui prouve 2).

**Preuve de la proposition 1**

Le feuilletage  $F$  étant transversalement projectif alors, si  $p : \tilde{V} \rightarrow V$  est le revêtement universel de, il existe une représentation  $\rho : \pi_1(V) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  et une submersion  $D : V \rightarrow S^1$  telles que  $D$  soit équivariante par rapport à  $\rho$  et le feuilletage  $p^*F$  est défini par  $D$ .

1. Si  $\Gamma$  est conjugué à un sous-groupe du groupe de rotations alors  $\Gamma$  est abélien et le feuilletage est sans holonomie. En effet si  $F$  est une feuille du feuilletage  $\mathcal{F}$  et  $L$  une feuille de  $p^*F$  dans  $p^{-1}(F)$  et  $x \in S^1$  le point  $D(L)$ , alors le groupe d'holonomie de la feuille  $F$  est conjugué à un sous-groupe du groupe de stabilité de  $x$  dans  $\Gamma$ . Comme les rotations n'admettent pas de points fixes sur  $S^1$  alors l'ensemble  $K = \{x \in S^1 | \gamma(x) = x, \gamma \in \Gamma, \gamma \neq Id\}$  des points de  $S^1$  dont le groupe de stabilité est non trivial est vide. Donc toutes les feuilles sont sans holonomie. D'après Chihi[5] un feuilletage transversalement projectif sans

holonomie sur une variété compacte peut être défini par une :

1 – forme fermée sans singularité. Il est donc transversalement affine.

2. Si  $\Gamma$  est constitué d'éléments hyperboliques ayant même ensemble de points fixes et d'éléments elliptiques laissant cet ensemble invariant alors l'ensemble

$K = \{x \in S^1 | \gamma(x) = x, \gamma \in \Gamma, \gamma \neq Id\}$  est fini et constitué de deux éléments qui sont les points fixes communs aux éléments hyperboliques. Et donc  $p \circ D^{-1}(K)$  est une réunion de feuilles compactes. En plus cet ensemble contient la réunion des feuilles ayant de l'holonomie et comme le feuilletage est sans feuille compacte alors cet ensemble est vide. Le feuilletage est donc sans holonomie et comme précédemment il est transversalement affine.

3. Si  $\Gamma$  est conjugué à un sous-groupe du groupe affine alors  $\mathcal{F}$  est un feuilletage transversalement affine. En effet d'après [6] il existe une famille discrète  $\{L_n\}$  de feuilles fermées dans  $V$  telles que dans chaque composante  $U$  de  $V - \cup_n L_n$ , le feuilletage  $\mathcal{F}/U$  est transversalement affine. Comme le feuilletage est sans feuille compacte, il est transversalement affine sur  $V$ . ■

**Preuve du théorème 4**

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement projectif sur  $V$  sans feuille compacte et de même classe d'Euler que la fibration. Soient  $\rho : \pi_1(V) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  représentation d'holonomie globale du feuilletage  $\mathcal{F}$  et  $\Gamma = \rho(\pi_1(V))$  le groupe d'holonomie globale. Il est évident que si  $\Gamma$  ne contient aucun sous-groupe libre non abélien alors il est transversalement affine d'après la proposition 1. Et d'après le théorème 2 à un revêtement fini près il est  $C^0$  –isotope à un feuilletage modèle.

■

**Références**

- [1] E. Ghys et V. Sergiescu, Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. *Topology*, 19 (1980), 179 – 197.
- [2] H. Nakayama, Transversely affine foliations on some surfaces bundles over  $S^1$  of pseudo-Anosov type, *Ann. Inst. Fourier* 41 (1991).
- [3] H. Dathe, Sur les feuilletages tendus transversalement affines des 3 – variétés fibrées sur  $S^1$ , *African Diaspora Journal of Mathematics* 9, no. 2, (2010).
- [4] C. Godbillon *Feuilletages, Etudes géométriques*. Birkäuser, 1991.
- [5] S. Chihi, 1979, Sur les feuilletages de codimension un transversalement homographiques, Publication de l'IRMA, Strasbourg(1979).
- [6] T. Inaba and S. Matsumoto, Resilient leaves in transversely projective foliations. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, Math.* 37(1990)89 – 101
- [7] F. Salein, Variété anti-de Sitter de dimension 3 exotiques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 50,1(2000) 257 – 284
- [8] P. de la Harpe, Free groups in linear groups, *Enseign. Math.* 29(1983) 129 – 144.
- [9] A. Fatihi, F. Laudenbach et V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*. S.M.F., France, 1979.



## SUR LES FEUILLETAGES DE LIE HOMOGENES

Hamidou DATHE<sup>i</sup>; Ameth NDIAYE<sup>ii</sup>

### Résumé

We give here some examples of solvable Lie foliations with some interesting properties on compact manifolds. We give some classifying results and exotic examples.

### Résumé

On construit des exemples de feuilletages de Lie dont le groupe transverse est résoluble avec quelques propriétés particulières sur des variétés compactes. On donne des théorèmes de classification en petite dimension et quelques exemples exotiques.

**Mots clés:** variété, compacte, feuilletages, Lie, homogène, résolubles.

### 1 Introduction

Soit  $V$  une variété compacte connexe et  $G$  un groupe de Lie (simplement connexe). Un  $G$ -feuilletage de Lie de  $V$  est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{F}$  de couple  $(U; f)$ , où  $U$  est un ouvert de  $V$  et  $f: U \rightarrow G$  une submersion, ayant les propriétés suivantes : (i) les ouverts  $U$  recouvrent  $V$ ; (ii) pour tout  $(U; f)$  et  $(W; h)$  dans  $\mathcal{F}$ , il existe  $g$  dans  $G$  tel que, pour tout  $x \in U \cap W$ , on ait  $f(x) = h(x)g$ . En particulier, les surfaces de niveaux des submersions  $f$ , pour  $(U; f)$  dans  $\mathcal{F}$ , se recollent pour former un feuilletage de  $V$ . Pour éviter les ambiguïtés, on supposera en outre que  $\mathcal{F}$  est maximal au sens suivant : si  $U$  est un ouvert de  $V$  et  $f: U \rightarrow G$  une submersion, si, pour tout  $(W; h)$  dans  $\mathcal{F}$ , il existe  $g$  dans  $G$  avec  $f = h.g$  sur  $U \cap W$ , on a  $(U, f) \in \mathcal{F}$ .

Soit  $V$  muni d'un tel feuilletage. Soit  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$ , identifiée à l'algèbre des champs de vecteurs invariants à droite à droite de  $G$ . Soient  $x$  un point de  $V$  et  $(U, f)$  dans  $\mathcal{F}$  tel que  $x \in U$ . Notons  $w_x = df_x \in T_x^*V \otimes \mathcal{G}$  : il ne dépend que de  $x$ . La 1-forme à coefficient dans  $\mathcal{G}$  ainsi définie vérifie  $dw + \frac{1}{2}[w, w] = 0$  (où  $[w, w]$  est la 2-forme définie par  $[w, w]_x(u, v) = [w_x(u), w_x(v)]$ ,  $x \in V, u, v \in T_xV$ ). Réciproquement, une section du fibré  $T^*V \otimes \mathcal{G}$  partout surjective

et satisfaisant à cette relation définit un feuilletage de Lie. En particulier l'espace  $\mathcal{F}(G, V)$  des  $G$ -feuilletage de Lie de  $V$  s'identifie à un sous ensemble de l'espace des sections  $T^*V \otimes \mathcal{G}$  qui est localement fermé pour la topologie de la convergence uniforme ; on le muni de la topologie induite par celle-ci.

Soit  $\tilde{V}$  le revêtement universel de  $V$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  le feuilletage relevé d'un  $G$ -feuilletage  $\mathcal{F}$  et  $\tilde{w}$  la 1-forme associée. Fixons un point  $x_0$  de  $V$  et un relevé  $\tilde{x}_0$  de  $x_0$ , et notons  $\Gamma$  le groupe fondamental de  $V$  en  $x_0$ , qui agit naturellement sur  $\tilde{V}$ . Il existe alors une submersion  $D: \tilde{V} \rightarrow G$  avec  $D(x_0) = e$  et un morphisme  $h: \Gamma \rightarrow G$  tels que  $\tilde{w} = dD$  et que, pour tout  $x$  dans  $\tilde{V}$  et pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , on ait  $D(\gamma.x) = D(x).h(\gamma)^{-1}$ . Les autres couples  $(D'; h')$  associés aux autres de points bases sont de la forme  $x \rightarrow (D(x)g, g^{-1}h(x)g)$  où  $g$  est un élément de  $G$ . On dit que  $D$  est la développante de  $\mathcal{F}$  et  $h$  son morphisme d'holonomie. Réciproquement, la donnée d'un couple  $(D; h)$  où  $D$  est une submersion de  $\tilde{V}$  dans  $G$  et  $h$  un morphisme de  $\Gamma$  dans  $G$  ayant les propriétés ci-dessus définit bien un  $G$ -feuilletage de Lie de  $V$ , Le groupe  $\Gamma$  étant de type fini, l'ensemble des homomorphismes de  $\Gamma$  dans  $G$  possède une topologie localement compacte naturelle.

L'application qui associe à un feuilletage son holonomie en est  $\tilde{\chi}_0$  continue pour cette topologie.

Ces notions et ces résultats sont dus principalement à E.Fedida. Le lecteur en trouvera un exposé détaillé dans le livre de P.Molino. Une large classe de feuilletages de Lie est donnée par le principe général suivant énoncé par E.Ghys dans [1] : Etant donné un groupe de  $H$ ,  $\Gamma$  un réseau cocompact de  $H$  et  $\varphi: H \rightarrow G$  un morphisme surjectif, les orbites du noyau de  $\varphi$  dans  $H/\Gamma$  forment naturellement un  $G$ -feuilletage de Lie de cette variété dont le morphisme d'holonomie est la restriction de  $\varphi$  à  $\Gamma$ . Nous dirons qu'un tel feuilletage est un  $G$ -feuilletage de Lie homogène. D'autre part, si  $M$  et  $V$  sont deux variétés compactes,  $\mathcal{F}$  un  $G$ -feuilletage de Lie sur  $M$  et  $f: V \rightarrow M$  une application différentiable transverse à  $\mathcal{F}$ ; les images réciproques des feuilles de  $\mathcal{F}$  définissent un nouveau  $G$ -feuilletage de Lie  $\mathcal{F}'$  sur  $V$ . On dit que  $\mathcal{F}'$  est une image inverse de  $\mathcal{F}$ , dans ce cas le groupe d'holonomie de  $\mathcal{F}'$  est un sous groupe de celui de  $\mathcal{F}$ . La question à laquelle on s'intéresse est la suivante : Est-ce que les feuilletages de Lie des variétés compactes dont le groupe transverse est résoluble peuvent être obtenus par le procédé ci-dessus ? Si la variété  $V$  est de dimension assez grande, on sait (voir [3]) que la réponse est négative. Ici on construit la variété la plus petite dimension possible sur laquelle on peut avoir un tel feuilletage. On construit aussi des exemples qui montrent que le groupe transverse n'est pas nécessairement complètement résoluble.

## 2- Feuilletages de Lie résolubles

Dans cette section on construit des feuilletages de Lie résolubles non homogènes sur des variétés de petite dimension. Les groupes transverses que nous considérons sont complètement résolubles ou non. Commençons par rappeler le théorème suivant qui résulte des travaux de Haefliger et de Matsumoto.

On sait d'après Haefliger que les feuilletages de Lie nilpotents sur des variétés compactes sont tous images inverses de feuilletages de Lie homogènes (voir [1]). Ce résultat de Haefliger a été étendu par Matsumoto pour les feuilletages de Lie des variétés de dimension 4 dont le groupe transverse est le groupe affine  $GA$  de  $\mathbb{R}$ . Associant les résultats de Ghys, Haefliger et Matsumoto, on peut énoncer le

**Théorème 2.1** Tout feuilletage de Lie de codimension 2 sur une variété de  $dim \leq 4$  est image inverse d'un feuilletage homogène.

### Preuve

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de Lie de groupe transverse  $G$  de codimension 2 sur une variété de  $dim \leq 4$ . Le groupe transverse (supposé simplement connexe) est soit isomorphe à  $\mathbb{R}^2$  ou au groupe affine  $GA$  de  $\mathbb{R}$ . On distingue alors deux cas :

Si le groupe transverse  $G$  est  $\mathbb{R}^2$  alors  $G$  est nilpotent et d'après Haefliger  $\mathcal{F}$  est image inverse d'un feuilletage homogène (voir [1]).

Si le groupe transverse est le groupe affine  $GA$  alors d'après Matsumoto [4],  $\mathcal{F}$  est image inverse d'un feuilletage homogène (voir [4]). ■

Les groupes de Lie résolubles non nilpotents qui sont les plus "proches" des groupes nilpotents sont ceux qui sont dits complètement résolubles. Rappelons la définition suivante :

**Définition 2.1** Un groupe de Lie résoluble  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  est dit complètement résoluble si tous les opérateurs linéaires adjoints  $ad_X$  ( $X \in \mathcal{G}$ ) ne possèdent que des valeurs propres réelles.

Par exemple tout groupe de Lie nilpotent est complètement résoluble. Si les groupes transverses sont résolubles et non complètement résolubles, le théorème suivant donne un exemple non homogène.

**Théorème 2.2** Il existe un feuilletage de Lie (sur une variété compacte) non homogène dont le groupe transverse est résoluble mais non complètement résoluble.

**Preuve**

On désigne par  $N$  le groupe de Heisenberg de dimension trois, c'est à dire le groupe des matrices carrés unipotentes triangulaires supérieures. Soit  $\Gamma$  le réseau cocompact de  $H = N \times N$  formée des matrices à coefficients entiers.

On note  $G_{8,\lambda}$  le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est définie par  $g_{8,\lambda} = (\mathbb{R}^3, e_1, e_2, e_3): [e_1, e_2] = \lambda e_1 - e_3, [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3, \lambda \geq 0$  Il est clair que  $G_{8,\lambda}$  est résoluble mais n'est pas complètement résoluble pour  $\lambda = 0$ , en effet  $ad_{e_1}$  possède  $i$  et  $-i$  parmi ses valeurs propres puisque son polynôme caractéristique est  $P(a) = a(a^2 + 1)$ .

La variété  $H/\Gamma$  peut être munie d'un  $G_{8,0}$ -feuilletage construit de la manière suivante. Le groupe  $G_{8,0}$  est le produit semi direct d'un groupe  $A$  isomorphe à  $\mathbb{R}$ , avec un groupe  $V$  isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , le groupe  $A$  agissant sur  $V$  par un groupe à un paramètre non trivial de rotation. On note  $B \subset A$  le noyau de ce groupe à un paramètre. Plus précisément le groupe  $G_{8,0}$  s'identifie à  $A \times V$  via un difféomorphisme  $\varphi$ . Donc un élément de  $G_{8,0}$  est  $\varphi(a, v)$  où  $(a, v) \in A \times V$  avec la loi  $\varphi(t, v) \cdot \varphi(t', v') = \varphi(t + t', v + r(t)v')$  où  $r(t)$  est la rotation d'angle  $2\pi t$ . Comme  $\Gamma \cap [H, H]$  est un réseau de  $[H, H]$  et  $H/[H, H]$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^4$  et la projection  $p: H \rightarrow H/[H, H]$  envoie  $\Gamma$  sur un réseau de  $\mathbb{R}^4$ . Il existe un morphisme surjectif  $\psi: H \rightarrow A \times V$  tel qu'on ait  $\psi(\Gamma) \subset B \times V$ ,  $A \times V$  étant muni de la structure de groupe produit direct. Remarquons que si  $t \in B$ ,  $G_{8,0}$  est isomorphe au groupe produit  $A \times V$ . L'application  $\varphi \circ \psi$  est la développante d'un  $G_{8,0}$ -feuilletage de Lie sur la variété  $H/\Gamma$  de dimension 6 dont le morphisme

d'holonomie est la restriction  $\varphi \circ \psi$  à  $\Gamma$ . L'application  $\varphi \circ \psi$  est équivariante, en effet soit  $\gamma \in \Gamma$  et  $\tilde{x} \in H$ , posons  $\psi(\lambda) = (a, v)$  avec  $a \in B$  et  $v \in V$  et  $\psi(\tilde{x}) = (b, w)$  avec  $b \in A$  et  $w \in V$ . On a :

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(\lambda \cdot \tilde{x}) &= \varphi(a + b, v + w) \\ &= \varphi(a, v) \cdot \varphi(b, w) \\ &= \varphi \circ \psi(\lambda) \cdot \varphi \circ \psi(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Ce feuilletage n'est pas homogène puisque  $\varphi \circ \psi$  n'est pas un homomorphisme de groupe de  $H$  dans  $G_{8,0}$ . ■

Que se passe t-il maintenant si le groupe transverse est complètement résoluble ?

Rappelons qu'un groupe de Lie  $G$  est dit polycyclique s'il possède une suite de composition à quotients cycliques. Si  $G$  est résoluble et est de type fini avec  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  comme partie génératrice, alors  $G$  est polycyclique si et seulement si les racines des  $\gamma_i$  sont des unités algébriques. Les racines d'un élément de  $G$  sont les valeurs propres de son adjoint. Une unité algébrique est un nombre complexe non nul qui est entier algébrique sur  $\mathbb{Z}$  ainsi que son inverse.

Dans [3], il est remarqué que les groupes d'holonomie des  $G$ -feuilletages homogènes sur une variété compacte sont polycycliques.

**Remarque 2.1** On dit qu'un feuilletage  $\mathcal{F}$  est classifiant au sens de Haefliger si le revêtement d'holonomie de chaque feuille est contractile. Pour un feuilletage de Lie, cela revient à dire que les feuilles elles même sont contractiles puisqu'elles sont sans holonomie. Toujours d'après Haefliger si  $\mathcal{F}$  est un  $G$ -feuilletage de Lie classifiant sur une variété compacte, tout autre  $G$ -feuilletage dont le groupe d'holonomie est un sous-groupe de celui de  $\mathcal{F}$  est une image inverse de  $\mathcal{F}$ . On a le théorème suivant dû à Meigniez.

**Théorème 2.3** ([3]) Soit  $G$  un groupe de Lie résoluble.  $\Gamma$  un sous groupe de  $G$  de

type fini. Si  $\Gamma$  contient un sous groupe à la fois polycyclique et uniforme, alors  $\Gamma$  est groupe d'holonomie d'un  $G$ -feuilletage.

Ainsi pour faire des feuilletages de Lie résoluble non homogène, il suffit de construire des sous-groupes uniformes de type fini non polycyclique mais qui contiennent des sous-groupes uniformes polycyclique. C'est ce que fait Meigniez dans l'exemple suivant :

**Feuilletage de Meigniez** (voir [3])

On considère dans  $GA$  le sous-groupe  $\Gamma$  engendré par  $x \rightarrow \lambda x$  et  $x \rightarrow \mu x + 1$ ,  $\lambda \neq 1$ ,  $\mu \neq 1$ ,  $\mu, \lambda > 0$  ;  $\lambda$  est une unité algébrique de degré 2 et  $\mu$  un réel qui n'est pas unité algébrique .  $\Gamma$  n'est pas polycyclique car possède des racines qui ne sont pas des unités algébriques. Mais  $\Gamma$  contient le sous groupe  $\Gamma'$  engendré par  $x \rightarrow \lambda x$  et  $x \rightarrow x + (\lambda - 1)(\mu - 1)$  qui est à la fois polycyclique et uniforme donc  $\Gamma$  est groupe d'holonomie d'un  $GA$ -feuilletage  $\mathcal{F}$  sur une variété compacte  $V^n$  de dimension  $n$ . Comme  $\Gamma$  n'est pas polycyclique ce feuilletage n'est image inverse d'aucun feuilletage homogène.

Dans l'exemple ci-dessus, on n'indique pas la dimension  $n$  de la variété mais d'après la preuve de 2.3, elle est assez grande mais aussi d'après le théorème 2.1,  $n \geq 5$ .

**Théorème 2.4** Il existe une variété compacte de dimension 5 qui porte un  $GA$ -feuilletage de Lie qui n'est image inverse d'aucun  $GA$ -feuilletage de Lie homogène.

**Preuve**

Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Et posons  $G_A^3$  le groupe de Lie résoluble obtenu en considérant sur  $\mathbb{R}^3$  la loi de composition définie comme suit :

$$\begin{aligned} (t, x, y). (t', x', y') \\ = (t + t', A^t(x', y') \\ + (x, y)) \end{aligned}$$

Le groupe de Lie  $G_A^3$  est résoluble et contient  $\Gamma_A = \{(t, x, y) \in G_A^3 / t, x, y \in \mathbb{Z}\}$  comme réseau cocompact. Soit  $\lambda$  la valeur propre de  $A$  qui est  $>1$  et  $v$  un vecteur propre associé. L'homomorphisme  $\pi: G_A^3 \rightarrow GA$  qui à  $(t, x, y) \rightarrow (\lambda^t, p(x, y))$  où  $p(x, y)$  est la composante de  $(x, y)$  suivant la direction de  $v$ ; induit sur  $T_A^3 = G_A^3/\Gamma_A$  un  $GA$ -feuilletage de Lie homogène noté  $\mathcal{F}$ . Le groupe d'holonomie de ce feuilletage  $\mathcal{F}$  est le sous-groupe  $\Gamma$  de  $GA$  engendré par  $(\lambda, 0)$  et  $(1, 1)$ . On va déformer  $\mathcal{F}$  :

On note donc  $\Gamma = \langle (\lambda, ); (1, 1) \rangle$ . Soit  $a'$  un réel non nul qui n'est pas une unité algébrique. On pose  $\Gamma' = \langle (\lambda, 0); (1, 1); (a', 0) \rangle$  le sous-groupe de  $GA$  engendré par les éléments  $(\lambda, 0); (1, 1); (a', 0)$ .

Nous allons montrer que  $\Gamma'$  est groupe d'holonomie d'un feuilletage de Lie sur une variété à bord de dimension 5.

Soit  $\delta$  le sous-groupe de  $\Gamma'$  définie par  $\delta = \langle \Gamma, (a', 0)\Gamma(a', 0)^{-1} \rangle$ ,  $\delta$  est engendré par  $\Gamma$  et son conjugué par  $(a', 0)$ , il est polycyclique et uniforme donc  $\Gamma'$  est groupe d'holonomie d'un feuilletage de Lie  $\mathcal{F}$  de groupe transverse  $GA$ . Pour obtenir la variété support de  $\mathcal{F}$ , on procède comme suit :

Soit  $B$  la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et la

variété  $H_B^5 = \mathbb{R} \times_B \mathbb{R}^4$  muni de la loi  $(t, x, y, z, u). (t', x', y', z', u') = (t + t', B^t(x, y, z, u) + (x', y', z', u'))$  et  $\Gamma_B^5$  le réseau des entiers de  $H_B^5$ . Muni de cette loi  $H_B^5$  est un groupe de Lie résoluble.

Le morphisme  $\phi: H_B^5 \rightarrow GA$  qui à  $(t, x, y, z, u) \rightarrow (\lambda^t, p(x, y) + a'p(z, u))$  où  $p(x, y)$  est la composante de  $(x, y)$  suivant la direction de  $\lambda$  et  $p(z, u)$  celle de  $(z, u)$  suivant la même direction, définit un  $GA$ -feuilletage homogène  $\mathcal{F}_B$  sur la variété  $V_B = H_B^5/ \Gamma_B^5$  dont le groupe d'holonomie est  $\delta$ .

Puisque le feuilletage  $\mathcal{F}_B$  est classifiant et  $\Gamma \subset \delta$  alors d'après la remarque 2.1 il existe une application  $\bar{f}: G_A^3 \rightarrow H_B^5$  telle que  $\bar{f}^*\mathcal{F}_B = \mathcal{F}$ .

On a  $\phi \circ \bar{f} = \pi$  où  $\pi$  est le morphisme d'holonomie de  $\mathcal{F}$ .

On peut par exemple poser  $\bar{f}: G_A^3 \rightarrow H_B^5$  qui à  $(t, x, y) \rightarrow (t, x, y, 0, 0)$ .

On a  $\bar{f}$  est invariant par l'action de  $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^2$  et de  $\mathbb{Z} \times_B \mathbb{Z}^4$ , il induit alors un plongement encore noté  $\bar{f}$  de  $T_A^3 \rightarrow V_B = H_B^5 / \Gamma_B^5$  tel que  $\bar{f}^*\mathcal{F}_B = \mathcal{F}$ , ce feuilletage est transverse au feuilletage  $\mathcal{F}_B$  puisque en tout point  $x$  de  $T_A^3$ , on a  $T_{\bar{f}(x)}V_B = T_{\bar{f}(x)}Ker\varphi + T_x\bar{f}(T_A^3)$ .

On a donc  $W = V - u(\bar{f}(T_A^3))$ , (où  $u(\bar{f}(T_A^3))$  est un petit voisinage ouvert tubulaire de  $\bar{f}(T_A^3)$ ), est une variété de dimension 5 compacte à bord qui porte un  $GA$ -feuilletage  $\mathcal{F}'$  transverse au bord. Le morphisme d'holonomie  $\rho'$  de  $\mathcal{F}'$  prolonge celui de  $\mathcal{F}_B$ . Comme  $V$  est transversalement orientable ainsi que  $T_A^3$ , le  $\partial W$  de  $W$  est difféomorphe à  $S^1 \times T_A^3$  si bien que  $\pi_1 W$  possède un générateur  $\epsilon$  de plus que celui de  $V_B$ . En fait  $\pi_1 W = \langle \Gamma_B^5, \epsilon \rangle$  le groupe engendré par  $\Gamma_B^5$  et  $\epsilon$ . Le revêtement universel de  $W$  est  $H_B^5$  et l'application développante de  $\mathcal{F}'$  n'est rien d'autre que  $\varphi$ . Ainsi pour  $\gamma \in \pi_1 \partial W$  différent de  $\epsilon$ ,  $\rho'(\gamma) = \rho(\gamma) \in \Gamma$ . Si on pose  $\rho(\gamma) = (p, q)$ , on a  $\rho'(\epsilon \cdot \gamma \cdot \epsilon^{-1}) = \rho'(\epsilon) \cdot \rho(\gamma) \cdot (\rho'(\epsilon))^{-1} = (p, aq)$ , ce qui implique que  $\rho'(\epsilon) = (a', 0)$ . Ainsi le groupe d'holonomie de  $\mathcal{F}'$  est  $\Gamma'$  qui n'est pas polycyclique puisque  $a'$  n'est pas une unité algébrique et donc un tel feuilletage  $\mathcal{F}'$  n'est image inverse d'aucun feuilletage homogène. ■

## Références

- [1] E.Ghys, Riemannian Foliations: Example and Problems, in P.Molino : Riemannian Foliations, Prog.in Math., Birkhauser (1988)
- [2] A. Haefliger, Groupoïde d'holonomie et classifiants: Structures transverses des feuilletages. Toulouse 1982 : Astérisque 116, SMF (1984)
- [3] G.Meignez, Feuilletages de Lie résolubles : Annales de la faculté des sciences de Toulouse, vol 4, No 4 (1995)
- [4] S.Matsumoto, N.Tsuchiya, The Lie a\_ne foliations on 4-manifolds: Inventiones mathematicae, Invent.math.109, 1-16(1992)
- [5] H.Dathe, Sur le feuilletage de Lehmann : C.R.Acad. Sci. Paris, Ser.I 349 (2011) 337-340

---

<sup>i</sup> Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal.

hamidou.dathe@yahoo.fr

<sup>ii</sup> Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal.

ndiaye\_ameth@yahoo.fr