

**EQUATION DE LAPLACE EN 2D: RESOLUTION
NUMERIQUE AVEC LA METHODE DES DIFFERENCES
FINIES EN UTILISANT LES BIBLIOTHEQUES DE
FORTRAN LAPACK ET BLAS**

**2D LAPLACE EQUATION: NUMERICAL SOLUTION
WITH THE FINITE DIFFERENCE METHOD USING THE
FORTRAN LIBRARIES LAPACK AND BLAS**

Fall C. M. Noreyni¹ and Gueye S. Bira¹

Résumé

Cette étude traite l'équation de Laplace à deux dimensions. Cette dernière est résolue avec la méthode des différences finies, en utilisant les bibliothèques de FORTRAN: LAPACK et BLAS. Un problème de potentiel est résolu de manière très précise. Ce travail montre l'utilisation efficace de ces outils très efficaces pour la résolution numérique d'équations différentielles.

Mots Clés : Equation de Laplace, Méthode des Différences finies, LAPACK, BLAS, FORTRAN

Abstract

This study handles the Laplace equation in two dimensions. The latter is solved with the finite difference method by using the FORTRAN libraries: LAPACK and BLAS. A potential problem was solved in a very precise manner. This work shows the efficient use of these very effective tools for solving numerically differential equations.

Keywords : Laplace Equation, Finite Difference Method, LAPACK, BLAS, FORTRAN

¹Departement de Physique, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, BP 21114 Dakar-Fann/Sénégal
Groupe Physique des Solides et Sciences des matériaux, GPSSM, BP 21114, Dakar-Fann/Sénégal
Correspondant : sbirag@gmail.com

1. INTRODUCTION

L'équation de Laplace à deux dimensions présente un grand intérêt pour la physique, les mathématiques, la chimie, l'ingénierie, etc. Une des techniques de résolution numérique, pour cette équation différentielle, est la méthode des différences finies (MDF). Cette dernière est l'une des méthodes les plus utilisées en calcul numérique. Elle doit ce succès à sa simplicité et à son applicabilité.

La résolution numérique d'équations différentielles nécessite une transformation du domaine de résolution (continu) en un domaine discret. La discrétisation de l'équation permet d'obtenir un système d'équations linéaires. L'inversion de la matrice associée à ce système linéaire, permet d'obtenir la solution [1] [2] [4].

Dans cette étude, un problème de puits de potentiel est posé, avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Puis, sa solution analytique est donnée. Ensuite, ce problème est résolu avec la méthode des différences finies; en utilisant l'approximation des différences centrées. Par la suite, les bibliothèques LAPACK (Linear Algebra PACKage) et BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) sont utilisées pour inverser la matrice correspondante. Enfin, la précision de cette méthode est donnée, avec la détermination de l'erreur relative.

2. PROBLEME DE Puits DE POTENTIEL EN 2D

Nous considérons un problème de puits de potentiel $\Phi(x, y)$ à deux dimensions avec des conditions aux limites de premier ordre (Dirichlet) :

$$\begin{cases} \Delta\Phi(x, y) = 0 ; (x, y) \in]0, a[\times]0, b[\\ \Phi(0, y) = \Phi(x, 0) = \Phi(a, y) = 0 \\ \Phi(x, b) = g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{cases} \quad (1)$$

Ici, a et b sont deux constantes réelles.

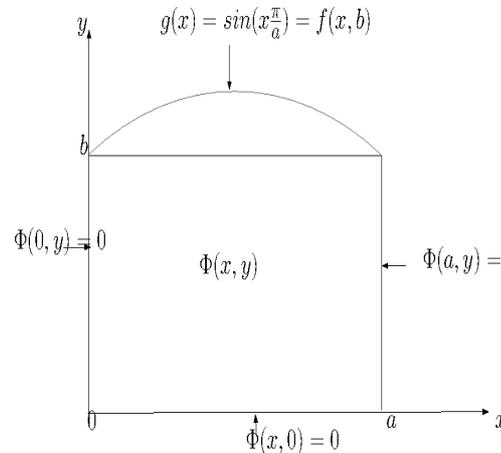


Figure 1 : Puits de Potentiel en 2D

La figure 1 représente le domaine de résolution et les conditions aux limites.

3. SOLUTION ANALYTIQUE

La solution analytique d'un tel problème est obtenue, en utilisant la méthode de séparation de Bernoulli. Cela revient à écrire la fonction à deux variables $\Phi(x, y)$ sous forme de produit de fonctions à une variable :

$$\Phi(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

En considérant les conditions aux limites, nous obtenons la formule exacte du potentiel cherché:

$$\Phi(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \quad (2)$$

Cette élégante fonction, donnée par l'équation (2), est représentée dans la figure 2.

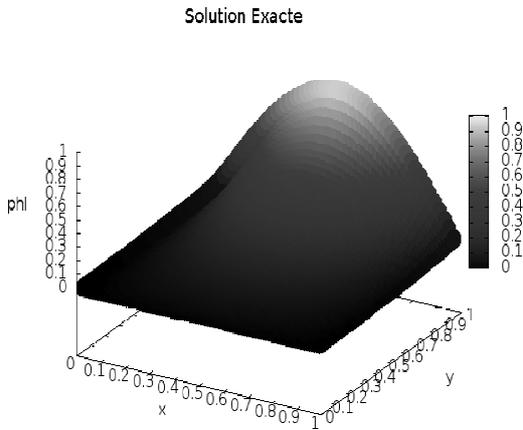


Figure 2 : Solution analytique

Nous pouvons remarquer que la symétrie de l'excitation $g(x)$ se retrouve dans le potentiel. Ceci est en accord avec le principe de Curie.

4. SOLUTION NUMERIQUE AVEC LA MDF

Pour notre domaine de résolution $\Omega =]0, a[\times]0, b[$, nous choisissons Δx et Δy comme étant respectivement les pas de discrétisation suivant les directions x et y . Les points discrets suivants sont considérés selon la direction x [1] [2] [3] :

$$x_i = i \cdot \Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N + 1; \quad \text{où}$$

$$\Delta x = \frac{a}{N + 1}.$$

Ceci suppose que nous cherchons le potentiel en N positions x_i .

Selon la direction y , nous avons M positions discrètes :

$$y_j = j \cdot \Delta y, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M + 1; \quad \text{où}$$

$$\Delta y = \frac{b}{M + 1}.$$

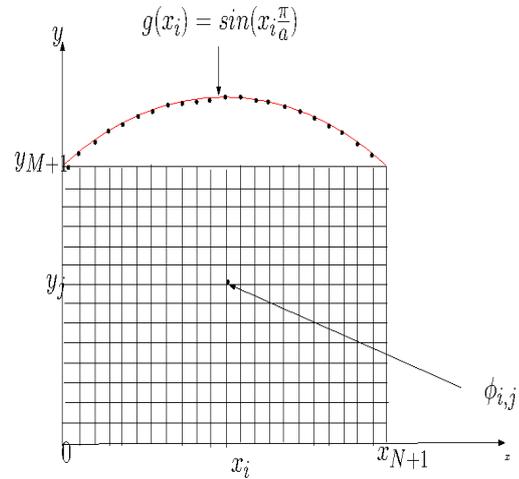


Figure 3 : Discrétisation du Domaine

La figure (3) illustre le maillage du domaine de résolution.

L'excitation, aussi, est discrétisée : $g(x) \rightarrow g(x_i) = g_i$.

L'approximation de la solution en un point quelconque (x_i, y_j) est : $\Phi(x_i, y_j) = \Phi_{i,j}$. En utilisant le développement de Taylor, suivant la direction x , on obtient :

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \Delta x \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

et

$$\Phi_{i-1,j} = \Phi_{i,j} - \Delta x \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4)$$

Il résulte de la somme de (3) et (4) :

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (5)$$

Suivant la direction y , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (6)$$

Considérant (5) et (6), l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (7)$$

Par la suite, nous allons nous restreindre au cas où $M=N$: $\Delta x = \Delta y = \Delta$.

L'équation (7) donne alors :

$$\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} - 4\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} = 0 \quad (8)$$

L'équation (8) correspond à un système d'équations linéaires qui peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$A \vec{\Phi} = \vec{b} \quad (9)$$

Où $\vec{\Phi}$ est un vecteur de dimension $N \times N$ contenant les solutions cherchées :

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1} \\ \Phi_{2,1} \\ \vdots \\ \Phi_{N,1} \\ \vdots \\ \Phi_{N,2} \\ \Phi_{1,3} \\ \vdots \\ \Phi_{N-1,N} \\ \Phi_{N,N} \end{bmatrix} \quad (10)$$

L'équation (10) définit les composants du vecteur $\vec{\Phi}$. Ainsi, pour un point discret (x_i, y_j) , la solution approchée est $\Phi_{i,j}$; et correspond à l'élément $\Phi_{i+(j-1)N}$ du vecteur $\vec{\Phi}$.

Dans l'équation (9), (A) est une matrice à $N \times N$ lignes et $N \times N$ colonnes. C'est une matrice à bandes (*band matrix*), pentadiagonale, symétrique et définie négative, [5] [6].

La matrice (A) possède la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Elle peut aussi être représentée sous forme d'une matrice de blocs :

$$\begin{bmatrix} D & I_N & 0 & \dots & \dots & 0 \\ I_N & D & I_N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_N & D & I_N \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_N & D \end{bmatrix}$$

Où (D) est une matrice tridiagonale d'ordre N, définie de la manière suivante :

$$(D) = (d_{ij}) = \begin{cases} -4 & , i = j \\ 1 & , |i - j| = 1 \\ 0 & , |i - j| > 1 \end{cases} ;$$

(I_N) est la matrice unité d'ordre N.

Le vecteur \vec{b} dans l'équation (9) est défini de la manière suivante :

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N \times (N-1)} \\ b_{N \times (N-1)+1} \\ \vdots \\ b_{N \times (N-1)+N-1} \\ b_{N \times N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin(x_1\pi) \\ \vdots \\ -\sin(x_{N-1}\pi) \\ -\sin(x_N\pi) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Nous avons donc :

$$b_i = \begin{cases} 0 & , 1 \leq i \leq N \times (N-1) \\ -g_i & , N \times (N-1) < i \leq N \times N \end{cases}$$

L'équation (9) peut donc être implémentée en FORTRAN.

5. IMPLEMENTATION EN FORTRAN

Nous avons effectivement implémenté l'équation matricielle en FORTRAN. La solution de notre problème de potentiel est obtenue en inversant la matrice (A). Ensuite, la multiplication de la matrice inverse et du vecteur \vec{b} donne la solution qui est enregistrée dans le vecteur $\vec{\Phi}$.

Cette matrice inverse permettant d'obtenir la solution est déterminée à l'aide des bibliothèques LAPACK et BLAS. Ces dernières contiennent des sous-routines de résolution de systèmes linéaires.

Elles permettent d'utiliser les méthodes de Gauss, de factorisation LU, QR, etc. Elles permettent également de déterminer des valeurs et vecteurs propres [7].

Pour ce présent travail, nous avons utilisé la sous-routine SGESV (Solveur General

System Vector). Cette sous-routine est appelée (Call) et les paramètres (A) et \vec{b} lui sont transmis ; de même que leur dimension. A l'issue de cet appel de la procédure SGESV, la solution est obtenue.

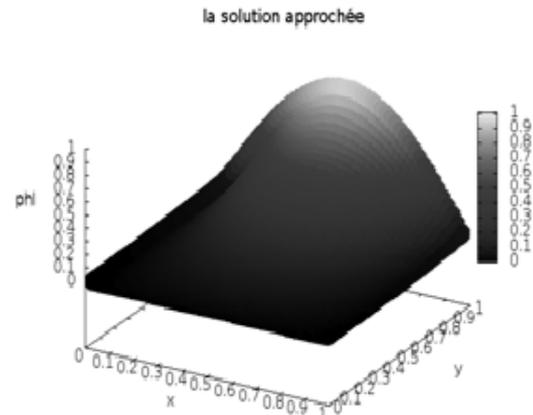


Figure 4 : Le Potentiel avec la MDF

La figure (4) représente le potentiel obtenu par la méthode des différences finies pour N=50.

Nous nous sommes intéressés, alors, à l'erreur relative, ϵ_{ij} , définie de la manière suivante, en tout point (x_i, y_j) [1] [6] :

$$\epsilon_{ij} = \left| \frac{\Phi^{exact}_{ij} - \Phi^{MDF}_{ij}}{\Phi^{exact}_{ij}} \right|$$

Cette erreur est calculée pour chaque point du domaine de résolution et est représentée graphiquement dans la figure (5)

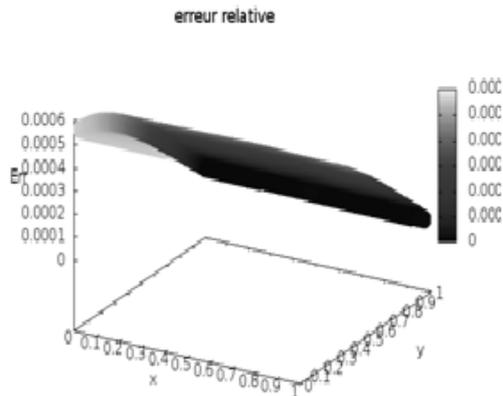


Figure 5 : L'erreur relative en chaque point du domaine.

L'erreur relative moyenne est :

$$\bar{\epsilon} \approx 3.4 \cdot 10^{-4}$$

Ce qui montre que le calcul numérique est très précis. Car, l'erreur de troncature attendue avec l'approximation choisie ici est de l'ordre de $O(\Delta^2)$ [1] [2] [6].

6. CONCLUSION

Cette étude s'est intéressée à l'équation de Laplace à deux dimensions. Un intéressant problème de potentiel y est traité et résolu avec la méthode des différences finies. Les bibliothèques de FORTRAN: LAPACK et BLAS ont permis d'obtenir la solution de manière efficace et très exacte.

Un autre travail pourra traiter un phénomène de la physique, en utilisant une sous-routine appropriée de ces bibliothèques.

7. REFERENCES

- [1] Gueye, S. Bira "The Exact Formulation of the Inverse of the Tridiagonal Matrix for Solving the 1D Poisson Equation with the Finite Difference Method", *Journal of Electromagnetic Analysis and Applications*, September 2014, vol.6, No 10, pp. 303-308. doi:10.4236/jemaa.2014.610030
- [2] Tordeux Sebastien et Victor Peron: "Analyse numerique fondamentale", Memoire, Université de Pau, 2011, pp. 1-78.
- [3] Weng Cho Chew and William H. Weedon: "A 3D Perfectly Matched Medium From Modified Maxwell's Equations With Stretched coordinates", *Microwave and optical technology letters*. September 1994, vol.7, No.13, pp. 599-604.
- [4] Rose M. Joseph and Allen Taflove: "FDTD Maxwell's Equations Models For NonLinear Electrodynamics And Optics", *IEEE transactions on antennas and propagation*. March 1997, vol.45, No.3, pp. 364-374.
- [5] <http://www.ufrmecca.univ-lyon1>
- [6] <http://www.techniques-ingenieur.fr>
- [7] <http://www.netlib.org>.