Journal des Sciences et Technologies 2011 vol.10 n°1 pp 42-47

SUR LES FEUILLETAGES DE LIE HOMOGENES

Hamidou DATHE[1]; Ameth NDIAYE[i]

Résumé
We give here some examples of solvable Lie foliations with some interesting properties on compact manifolds. We give some classifying results and exotic examples.

Résumé
On construit des exemples de feuilletages de Lie dont le groupe transverse est résoluble avec quelques propriétés particulières sur des variétés compactes. On donne des théorèmes de classification en petite dimension et quelques exemples exotiques.

Mots clés: variété, compacte, feuilletages, Lie, homogène, résolubles.

[1] Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal.
hamidou.dathe@yahoo.fr
[1] Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal.
ndiaye_ameth@yahoo.fr

1 Introduction

Soit V une variété compacte connexe et G un groupe de Lie (simplement connexe). Un G-feuilletage de Lie de V est la donnée d'un ensemble $\mathcal{F}$ de couple ($U; f$) , où U est un ouvert de V et $f: U \to G$ une submersion, ayant les propriétés suivantes : (i) les ouverts U recouvrent V ; (ii) pour tout ($U; f$) et ($W; h$) dans $\mathcal{F}$, il existe g dans G tel que, pour tout $x \in U \cap W$, on ait $f(x) = h(x)g$. En particulier, les surfaces de niveaux des submersions f, pour ($U; f$) dans $\mathcal{F}$, se recollent pour former un feuilletage de V . Pour éviter les ambigüités, on supposera en outre que $\mathcal{F}$ est maximal au sens suivant : si U est un ouvert de V et $f: U \to G$ une submersion, si, pour tout ($W; h$) dans $\mathcal{F}$, il existe g dans G avec $f = h.g$ sur $U \cap W$, on a $(U, f) \in \mathcal{F}$.

Soit V muni d'un tel feuilletage. Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, identifiée à l'algèbre des champs de vecteurs invariants à droite à droite de G. Soient x un point de V et $(U, f)\, dans\, \mathcal{F}$ tel que $x \in U$. Notons $w_x = df_x \in T_x^*V \otimes \mathcal{G}$: il ne dépend que de x. La 1-forme à coefficient dans $\mathcal{G}$ ainsi définie vérifie $dw + \frac{1}{2}[w, w] = 0$ (où $[w, w]$ est la 2-forme définie par $[w, w]_x(u, v) = [w_x(u), w_x(v)]$, $x \in V, u, v \in T_xV$). Réciproquement, une section du fibré $T^*V \otimes \mathcal{G}$ partout surjective et satisfaisant à cette relation définit un feuilletage de Lie. En particulier l'espace $\mathcal{F}(G, V)$des G-feuilletage de Lie de V s'identifie à un sous ensemble de l'espace des sections $T^*V \otimes \mathcal{G}$ qui est localement fermé pour la topologie de la convergence uniforme ; on le muni de la topologie induite par celle-ci.

Soit $\tilde{V}$ le revêtement universel de V , $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé d'un G-feuilletage $\mathcal{F}$ et $\widetilde{w}$ la 1-forme associée. Fixons un point x_0 de V et un relevé $\tilde{x}_0$ de x_0, et notons Γ le groupe fondamental de V en x_0 , qui agit naturellement sur $\tilde{V}$. Il existe alors une submersion $D: \tilde{V} \to G$ avec $D(x_0) = e$ et un morphisme $h: \Gamma \to G$ tels que $\widetilde{w} = dD$ et que, pour tout x dans $\tilde{V}$et pour tout γ dans Γ, on ait $D(\gamma.x) = D(x).h(\gamma)^{-1}$. Les autres couples ($D'$; h') associés aux autres de points bases sont de la forme $x \to (D(x)g, g^{-1}h(x)g)$ où g est un élément de G. On dit que D est la développante de $\mathcal{F}$ et h son morphisme d'holonomie. Réciproquement, la donnée d'un couple ($D; h$) où D est une submersion de $\tilde{V}$ dans G et h un morphisme de Γ dans G ayant les propriétés ci-dessus définit bien un G-feuilletage de Lie de V, Le groupe Γ étant de type fini, l'ensemble des homomorphismes de Γ dans G possède une topologie localement compacte naturelle. L'application qui associe à un feuilletage son holonomie en est $\tilde{x}_0$ continue pour cette topologie.

Ces notions et ces résultats sont dus principalement à E.Fedida. Le lecteur en trouvera un exposé détaillé dans le livre de P.Molino. Une large classe de feuilletages de Lie est donnée par le principe général suivant énoncé par E.Ghys dans [1] : Etant donnés un groupe de H, Γ un réseau cocompact de H et $\varphi: H \to G$ un morphisme surjectif, les orbites du noyau de φ dans H/Γ forment naturellement un G-feuilletage de Lie de cette variété dont le morphisme d'holonomie est la restriction de φ à Γ. Nous dirons qu'un tel feuilletage est un G- feuilletage de Lie homogène. D'autre part, si M et V sont deux variétés compactes, $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie sur M et $f: V \to M$une application différentiable transverse à $\mathcal{F}$; les images réciproques des feuilles de $\mathcal{F}$ définissent un nouveau G-feuilletage de Lie $\mathcal{F}'$ sur V . On dit que $\mathcal{F}'$ est une image inverse de $\mathcal{F}$, dans ce cas le groupe d'holonomie de $\mathcal{F}'$ est un sous groupe de celui de $\mathcal{F}$. La question à laquelle on s'intéresse est la suivante : Est-ce que les feuilletages de Lie des variétés compactes dont le groupe transverse est résoluble peuvent être obtenus par le procédé ci-dessus ? Si la variété V est de dimension assez grande, on sait (voir [3]) que la réponse est négative. Ici on construit la variété la plus petite dimension possible sur laquelle on peut avoir un tel feuilletage. On construit aussi des exemples qui montrent que le groupe transverse n'est pas nécessairement complètement résoluble.

2- Feuilletages de Lie résolubles

Dans cette section on construit des feuilletages de Lie résolubles non homogènes sur des variétés de petite dimension. Les groupes transverses que nous considérons sont complètement résolubles ou non. Commençons par rappeler le théorème suivant qui résulte des travaux de Haefliger et de Matsumoto.

On sait d'après Haefliger que les feuilletages de Lie nilpotents sur des variétés compactes sont tous images inverses de feuilletages de Lie homogènes (voir [1]). Ce résultat de Haefliger a été étendu par Matsumoto pour les feuilletages de Lie des variétés de dimension 4 dont le groupe transverse est le groupe affine *GA* de $\mathbb{R}$. Associant les résultats de Ghys, Haefliger et Matsumoto, on peut énoncer le

Théorème 2.1 Tout feuilletage de Lie de codimension 2 sur une variété de $dim \leq 4$ est image inverse d'un feuilletage homogène.

Preuve

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de Lie de groupe transverse G de codimension 2 sur une variété de $dim \leq 4$. Le groupe transverse (supposé simplement connexe) est soit isomorphe à $\mathbb{R}^2$ ou au groupe affine *GA* de $\mathbb{R}$. On distingue alors deux cas :

Si le groupe transverse G est $\mathbb{R}^2$ alors G est nilpotent et d'après Haefliger $\mathcal{F}$ est image inverse d'un feuilletage homogène (voir [1]).

Si le groupe transverse est le groupe affine *GA* alors d'après Matsumoto [4], $\mathcal{F}$ est image inverse d'un feuilletage homogène (voir [4]). ■

Les groupes de Lie résolubles non nilpotents qui sont les plus "proches" des groupes nilpotents sont ceux qui sont dits complètement résolubles. Rappelons la définition suivante :

Définition 2.1 Un groupe de Lie résoluble G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dit complètement résoluble si tous les opérateurs linéaires adjoints ad_X $(X \in \mathcal{G})$ ne possèdent que des valeurs propres réelles.

Par exemple tout groupe de Lie nilpotent est complètement résoluble. Si les groupes transverses sont résolubles et non complètement résolubles, le théorème suivant donne un exemple non homogène.

Théorème 2.2 Il existe un feuilletage de Lie (sur une variété compacte) non homogène dont le groupe transverse est résoluble mais non complètement résoluble.

Preuve

On désigne par N le groupe de Heisenberg de dimension trois, c'est à dire le groupe des matrices carrés unipotentes triangulaires supérieures. Soit Γ le réseau cocompact de $H = N \times N$ formée des matrices à coefficients entiers.

On note $G_{8,\lambda}$ le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est définie par $g_{8,\lambda} = (\mathbb{R}^3, e_1, e_2, e_3)\colon [e_1, e_2] = \lambda e_1 - e_3, [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3$, $\lambda \geq 0$

Il est clair que $G_{8,\lambda}$ est résoluble mais n'est pas complètement résoluble pour $\lambda = 0$, en effet ad_{e_1} possède i et $-i$ parmi ses valeurs propres puisque son polynôme caractéristique est $P(a) = a(a^2 + 1)$.

La variété H/Γ peut être munie d'un $G_{8,0}$-feuilletage construit de la manière suivante. Le groupe $G_{8,0}$ est le produit semi direct d'un groupe A isomorphe à $\mathbb{R}$, avec un groupe V isomorphe à $\mathbb{R}^2$, le groupe A agissant sur V par un groupe à un paramètre non trivial de rotation. On note $B \subset A$ le noyau de ce groupe à un paramètre. Plus précisément le groupe $G_{8,0}$ s'identifie à $A \times V$ via un difféomorphisme φ. Donc un élément de $G_{8,0}$ est $\varphi(a, v)$ où $(a, v) \epsilon A \times V$ avec la loi $\varphi(t, v).\varphi(t', v') = \varphi(t +$

$t', v + r(t)v')$ où $r(t)$ est la rotation d'angle $2\pi t$. Comme $\Gamma \cap [H, H]$ est un réseau de $[H, H]$ et $H/[H, H]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^4$ et la projection $p: H \to H/[H, H]$ envoie Γ sur un réseau de $\mathbb{R}^4$. Il existe un morphisme surjectif $\psi: H \to A \times V$ tel qu'on ait $\psi(\Gamma) \subset B \times V$, $A \times V$ étant muni de la structure de groupe produit direct. Remarquons que si $t \in B$, $G_{8,0}$ est isomorphe au groupe produit $A \times V$. L'application $\varphi o \psi$ est la développante d'un $G_{8,0}$-feuilletage de Lie sur la variété H/Γ de dimension 6 dont le morphisme d'holonomie est la restriction $\varphi o \psi$ à Γ. L'application $\varphi o \psi$ est équivariante, en effet soit $\gamma \in \Gamma$ et $\tilde{x} \in H$, posons $\psi(\lambda) = (a, v)$ avec $a \in B$ et $v \in V$ et $\psi(\tilde{x}) = (b, w)$ avec $b \in A$ et $w \in V$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi o \psi(\lambda . \tilde{x}) &= \varphi(a + b, v + w) \\ &= \varphi(a, v) . \varphi(b, w) \\ &= \varphi o \psi(\lambda) . \varphi o \psi(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Ce feuilletage n'est pas homogène puisque $\varphi o \psi$ n'est pas un homomorphisme de groupe de H dans $G_{8,0}$. ■

Que se passe t-il maintenant si le groupe transverse est complètement résoluble ?
Rappelons qu'un groupe de Lie Gest dit polycyclique s'il possède une suite de composition à quotients cycliques. Si G est résoluble et est de type fini avec $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ comme partie génératrice, alors G est polycyclique si et seulement si les racines des γ_i sont des unités algébriques. Les racines d'un élément de G sont les valeurs propres de son adjoint. Une unité algébrique est un nombre complexe non nul qui est entier algébrique sur Z ainsi que son inverse.

Dans [3], il est remarqué que les groupes d'holonomie des G-feuilletages homogènes sur une variété compacte sont polycycliques.

Remarque 2.1 On dit qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ est classifiant au sens de Haefliger si le revêtement d'holonomie de chaque feuille est contractile. Pour un feuilletage de Lie, cela revient à dire que les feuilles elles même sont contractiles puisqu'elles sont sans holonomie. Toujours d'après Haefliger si $\mathcal{F}$ est un G-feuilletage de Lie classifiant sur une variété compacte, tout autre G-feuilletage dont le groupe d'holonomie est un sous-groupe de celui de $\mathcal{F}$ est une image inverse de $\mathcal{F}$.On a le théorème suivant dû à Meigniez.

Théorème 2.3 ([3]) Soit G un groupe de Lie résoluble. Γ un sous groupe de G de type fini. Si Γ contient un sous groupe à la fois polycyclique et uniforme, alors Γ est groupe d'holonomie d'un G-feuilletage.

Ainsi pour faire des feuilletages de Lie résoluble non homogène, il suffit de construire des sous-groupes uniformes de type fini non polycyclique mais qui contiennent des sous-groupes uniformes polycyclique. C'est ce que fait Meigniez dans l'exemple suivant :

Feuilletage de Meigniez (voir [3])
On considère dans GA le sous-groupe Γ engendré par $x \to \lambda x$ et $x \to \mu x + 1$, $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$, $\mu, \lambda > 0$; λ est une unité algébrique de degré 2 et μ un réel qui n'est pas unité algébrique . Γ n'est pas polycyclique car possède des racines qui ne sont pas des unités algébriques. Mais Γ contient le sous groupe Γ'engendré par $x \to \lambda x$ et $x \to x + (\lambda - 1)(\mu - 1)$ qui est à la fois polycyclique et uniforme donc Γ est groupe d'holonomie d'un GA-feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété compacte V^n de dimension n. Comme Γ n'est pas polycyclique ce feuilletage n'est image inverse d'aucun feuilletage homogène.

Dans l'exemple ci-dessus, on n'indique pas la dimension n de la variété mais d'après la preuve de 2.3, elle est assez grande mais aussi d'après le théorème 2.1, $n \geq 5$.

Théorème 2.4 Il existe une variété compacte de dimension 5 qui porte un GA-

feuilletage de Lie qui n'est image inverse d'aucun GA-feuilletage de Lie homogène.

Preuve

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Et posons G_A^3 le groupe de Lie résoluble obtenu en considérant sur $\mathbb{R}^3$ la loi de composition définie comme suit :

$$(t,x,y).(t',x',y') = (t+t', A^t(x',y') + (x,y))$$

Le groupe de Lie G_A^3 est résoluble et contient $\Gamma_A = \{(t,x,y) \in G_A^3 / t,x,y \in \mathbb{Z}\}$ comme réseau cocompact. Soit λ la valeur propre de A qui est >1 et v un vecteur propre associé. L'homomorphisme $\pi: G_A^3 \to GA$ qui à $(t,x,y) \to (\lambda^t, p(x,y))$ où $p(x,y)$ est la composante de (x,y) suivant la direction de v ; induit sur $T_A^3 = G_A^3/\Gamma_A$ un GA-feuilletage de Lie homogène noté $\mathcal{F}$. Le groupe d'holonomie de ce feuilletage $\mathcal{F}$ est le sous-groupe Γ de GA engendré par $(\lambda, 0)$ et $(1,1)$. On va déformer $\mathcal{F}$:

On note donc $\Gamma =< (\lambda,);(1,1) >$. Soit a' un réel non nul qui n'est pas une unité algébrique. On pose $\Gamma' =< (\lambda,0);(1,1);(a',0) >$ le sous-groupe de GA engendré par les éléments $(\lambda,0);(1,1);(a',0)$.

Nous allons montrer que Γ' est groupe d'holonomie d'un feuilletage de Lie sur une variété à bord de dimension 5.

Soit δ le sous-groupe de Γ'définie par $\delta =< \Gamma, (a',0)\Gamma(a',0)^{-1} >$, δ est engendré par Γ et son conjugué par $(a',0)$, il est polycyclique et uniforme donc Γ'est groupe d'holonomie d'un feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ de groupe transverse GA. Pour obtenir la variété support de $\mathcal{F}$, on procède comme suit :

Soit B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la variété $H_B^5 = \mathbb{R} \times_B \mathbb{R}^4$ muni de la loi $(t,x,y,z,u).(t',x',y',z',u') = \big(t+t', B^t(x,y,z,u) + (x',y',z',u')\big)$ et Γ_B^5 le réseau des entiers de H_B^5. Muni de cette loi H_B^5 est un groupe de Lie résoluble.

Le morphisme $\phi: H_B^5 \to GA$ qui à $(t,x,y,z,u) \to (\lambda^t, p(x,y) + a'p(z,u))$ où $p(x,y)$ est la composante de (x,y) suivant la direction de λ et $p(z,u)$ celle de (z,u) suivant la même direction, définit un GA-feuilletage homogène $\mathcal{F}_B$ sur la variété $V_B = H_B^5/\ \Gamma_B^5$ dont le groupe d'holonomie est δ.

Puisque le feuilletage $\mathcal{F}_B$ est classifiant et $\Gamma \subset \delta$ alors d'après la remarque 2.1 il existe une application $\bar{f}: G_A^3 \to H_B^5$ telle que $\bar{f}^*\mathcal{F}_B = \mathcal{F}$.
On a $\phi o \bar{f} = \pi$ où π est le morphisme d'holonomie de $\mathcal{F}$.
On peut par exemple poser $\bar{f}: G_A^3 \to H_B^5$ qui à $(t,x,y) \to (t,x,y,0,0)$.
On a $\bar{f}$ est invariant par l'action de $\mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^2$ et de $\mathbb{Z} \times_B \mathbb{Z}^4$, il induit alors un plongement encore noté $\bar{f}$ de $T_A^3 \to V_B = H_B^5 / \Gamma_B^5$ tel que $\bar{f}^*\mathcal{F}_B = \mathcal{F}$, ce feuilletage est transverse au feuilletage $\mathcal{F}_B$ puisque en tout point x de T_A^3 , on a $T_{\bar{f}(x)}V_B = T_{\bar{f}(x)}Ker\varphi + T_x\bar{f}(T_A^3)$.
On a donc $W = V - u(\bar{f}(T_A^3))$, (où $u\left(\bar{f}(T_A^3)\right)$ est un petit voisinage ouvert tubulaire de $\bar{f}(T_A^3)$), est une variété de dimension 5compacte à bord qui porte un GA-feuilletage $\mathcal{F}'$ transverse au bord. Le morphisme d'holonomie ρ' de $\mathcal{F}'$ prolonge celui de $\mathcal{F}_B$. Comme V est transversalement orientable ainsi que T_A^3, le ∂W de W est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times T_A^3$ si bien que $\pi_1 W$ possède un générateur ϵ de plus que celui de V_B. En fait $\pi_1 W = <\Gamma_B^5, \epsilon>$ le groupe engendré par Γ_B^5 et ϵ. Le revêtement universel de W est H_B^5 et l'application développante de $\mathcal{F}'$ n'est rien d'autre que φ. Ainsi pour $\gamma \in \pi_1 \partial W$ différent de ϵ, $\rho'(\gamma) = \rho(\gamma) \in \Gamma$. Si on pose $\rho(\gamma) = (p,q)$, on a $\rho'(\epsilon.\gamma.\epsilon^{-1}) = \rho'(\epsilon).\rho(\gamma).(\rho'(\epsilon))^{-1} = (p,aq)$, ce qui implique que $\rho'(\epsilon) = (a',0)$. Ainsi le groupe d'holonomie de $\mathcal{F}'$ est Γ' qui n'est pas polycyclique puisque a' n'est pas une unité algébrique et donc un tel feuilletage $\mathcal{F}'$ n'est image inverse d'aucun feuilletage homogène. ∎

Références

[1] E.Ghys, Riemannian Foliations: Example and Problems, in P.Molino : Riemannian Foliations, Prog.in Math., Birkhauser (1988)

[2] A. Haefliger, Groupoïde d'holonomie et classifiants: Structures transverses des feuilletages. Toulouse 1982 : Astéristique 116, SMF (1984)

[3] G.Meignez, Feuilletages de Lie résolubles : Annales de la faculté des sciences de Toulouse, vol 4, No 4 (1995)

[4] S.Matsumoto, N.Tsuchiya, The Lie a_ne foliations on 4-manifolds: Inventiones mathematicae, Invent.math.109, 1-16(1992)

[5] H.Dathe, Sur le feuilletage de Lehmann : C.R.Acad. Sci. Paris, Ser.I 349 (2011) 337-340