UN REGARD NON EUCLIDIEN POSE SUR LES NOMBRES

Françoise Dal'Bo[1]

A mes collègues sénégalais engagés dans la recherche, dont l'activité aussi abstraite soit-elle, éclaire l'avenir de leur pays

Nombres et géométrie ont toujours été intimement liés. Pendant des siècles, ce lien s'est construit autour de figures du plan euclidien. Pensons par exemple à la théorie des proportions d'Euclide, à la découverte du nombre $\sqrt{2}$ comme rapport, dans un carré, entre la longueur d'une diagonale et d'un côté, ou encore au nombre π comme rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Aujourd'hui, ce lien s'est enrichi d'objets géométriques de nature dynamique. A l' origine de ce nouveau regard posé sur les nombres, on peut citer E. Artin (1898 − 1962) qui relia le comportement de trajectoires sur une surface à des propriétés arithmétiques des nombres. Cette nouvelle approche s'est pleinement développée à la fin du XXIème siècle à l'initiative du célèbre mathématicien G. Margulis, qui l'utilisa pour résoudre une importante conjecture d'arithmétique formulée par A. Oppenheim (1903-1997). La démonstration de G. Margulis a été le point de départ d'une véritable école de mathématiciens répartis dans le monde entier, qui travaillent aujourd'hui activement sur le comportement de trajectoires sur des espaces non euclidiens avec en ligne de mire la résolution de conjectures de théorie des nombres. L'une des conjectures visées, énoncée dans les années 1930 par J.E Littelwood (1885−1977), affirme qu'étant donnés deux nombres a et b, il existe une infinité d'entiers p, q, t tels que la quantité $\mathrm{q}^2(\mathrm{a} - \mathrm{p}/\mathrm{q})(\mathrm{b} - \mathrm{r}/\mathrm{q})$ soit aussi proche de zéro que l'on veut.

Le but de ce texte est de mettre en lumière dans un cadre élémentaire, cette passerelle entre la théorie des nombres et la « géométrie dynamique ». Nous ne donnerons aucune démonstration, le lecteur souhaitant plus de détails pourra se reporter au mémoire de Master Recherche de Cheikh Lo « Pavages hyperboliques et développement en fractions continues », soutenu `a l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar en février 2010.

Développement en fractions continues.

De tout temps les mathématiciens ont cherché des méthodes leur permettant d'approcher un nombre par des valeurs rationnelles. Cette recherche s'est fortement développée à partir du XVIIIème siècle pour devenir aujourd'hui une branche féconde de l'arithmétique, la théorie de l'approximation diophantienne, dont les prémices se trouvent déjà dans les travaux de Diophante d' Alexandrie. La principale motivation dans ce domaine est de limiter l'erreur commise entre un nombre irrationnel et ses valeurs approchées. Il existe différentes méthodes permettant d'approcher un nombre x par des rationnels. L'une des plus familières est certainement le développement décimal qui repose sur un algorithme simple conduisant à une écriture de x au moyen de termes de la forme$a_k/10^k$, avec $k \in \mathbb{Z}\, et\, a_k \in \{0,1, \dots ,9\}$.

La méthode privilégiée en théorie de l'approximation diophantienne est celle du développement en fractions continues. C'est elle par exemple que J. Dirichlet (1805−1859) utilisa pour démontrer qu'étant donné un irrationnel x, il existe une infinité de rationnels p/q dont la

distance à x est inférieure à $1/2q^2$. Le développement en fractions continues trouve son origine dans un algorithme d'Euclide permettant de calculer le plus grand diviseur commun entre deux nombres, en voici une présentation.
Si x est un nombre positif, il est compris entre deux entiers naturels consécutifs. Le plus petit de ces entiers n_0 est la partie entière de x. Choisissons-le comme première approximation de x. On peut alors écrire $x = n_0 + N_0$, où N_0 est un nombre compris entre 0 et 1. Si ce nombre est nul, on s'arrête. Sinon, on choisit d'approcher $1/N_0$, qui est supérieur à 1, par sa partie entière n_1, et on a $x = n_0 + 1/(n_1 + N_1)$, où N_1 est compris entre 0 et 1. Si N_1 n'est pas nul, on recommence en remplaçant N_0 par N_1.

On obtient $x = n_0 + 1/(n_1 + 1/(n_2 + N_2))$, où N_2 est la partie entière de N_1, et N_2 est compris entre 0 et 1. Ce processus se termine si à une étape, le nombre N_k produit par cet algorithme, est nul. Il se poursuit indéfiniment sinon, et dans ce cas aucun des entiers n_i n'est nul. On peut considérer la suite $n_0, n_1, n_2, \ldots$ de ces entiers naturels non nuls comme un codage des nombres. Dans ce modèle, les suites finies représentent les rationnels. Quant aux suites infinies périodiques à partir d'un certain rang, elles correspondent aux nombres quadratiques, solutions d'un polynôme à coefficients entiers de degré 2 comme par exemple $\sqrt{2}$, ou encore comme le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui satisfait l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Dans ce codage, le nombre d'or est d'ailleurs le plus simple des irrationnels dans la mesure où tous les termes de la suite $n_0, n_1, n_2, \ldots$ sont égaux à 1. Pour obtenir des valeurs approchées du nombre x, il faut s'intéresser à la suite p_i/q_i = n_0+ 1/(n_1 + 1/(n_2 + ... 1/n_i)). Ces rationnels s'approchent de x avec une excellente précision. Par exemple si x est rationnel, la suite pi/qi est finie, contrairement à la suite des valeurs approchées (lorsque x n'est pas décimal) fournie par le développement décimal.

Dans la suite de ce texte nous donnons une interprétation géométrique du développement en fractions continues d'un nombre, mettant en jeu un pavage d'un plan non euclidien.

Le demi-plan de Poincaré et ses étoiles, les réels.

La géométrie, étymologiquement science qui mesure la Terre, telle qu'elle a été définie dans les éléments d'Euclide, a longtemps été considérée comme l'unique géométrie. Pendant deux millénaires, des mathématiciens ont entrepris de déduire, à partir des quatre premiers postulats énoncés dans ce traité, le cinquième selon lequel dans le plan par un point extérieur à une droite donnée Δ, il passe une unique droite ne rencontrant pas Δ.

Il a fallu attendre les années 1830, avec les travaux de N. Lobatchevski, de J. Bolyai et de C.F Gauss, pour mettre fin à cette entreprise et pour qu'apparaissent, aux côtés du plan euclidien, des géométries contredisant le postulat des parallèles d'Euclide. Mais c'est à partir de la fin du XXIIème siècle, grâce à H. Poincaré, que le premier exemple non borné de ces géométries, dites non-euclidiennes, connu aujourd'hui sous le nom de demi-plan de Poincaré, se simplifie et passe du statut de curiosité à celui d'outil puissant notamment en théorie des nombres. Le paragraphe qui suit est une présentation de cet exemple.

La construction du demi-plan de Poincaré, telle que ce dernier l'a conçue, s'appuie sur le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, identifié au plan complexe $\mathbb{C}$. La partie du plan qu'elle prend en compte est le demi-plan

$$H = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

On remarque que ce demi-plan est laissé invariant par les trois fonctions complexes suivantes :

$$h_\alpha(z) = \alpha z \ avec\ \alpha > 0$$

$$t_\beta(z) = z + \beta \; avec \; \beta \in \mathbb{R}$$
$$s(z) = \frac{-1}{z}$$

Ces fonctions engendrent le groupe H des homographies réelles défini par

H= $\left\{\frac{az+b}{cz+d}; a, b, c \; et \; d \in \mathbb{R} \; avec \; ad - bc = 1\right\}$

Par construction, pour tous $g \in$ H et $z \in$ H, on a $g(z) \in$ H. Le groupe H permet donc de déplacer les points de H. Par ailleurs on montre que les propriétés suivantes sont satisfaites :

Propriété *Soient z et z' dans H :*
(i) Il existe $g \in H$, tel que $g(z) = z'$.
(ii) Il existe $g \in H$, tel que $g(z) = i$, $Re\big(g(z')\big) = 0$ et $Im\left(g(z')\right) > 1$.

En s'appuyant sur ces propriétés d'homogénéité, on construit sur H une distance d, à partir des deux contraintes suivantes :

- pour tout $t > 0, d(i, it) = |\ln(t)|$ t > 0,
- pour tous $z \neq z'$ dans **H**, $d(z,z') = d(g(z), g(z'))$, où g est l'unique élément du groupe H tel que, $Re(g(z') = 0$ et $\big(g(z')\big) > 1$.

Une telle application g de **H** × **H** dans $\mathbb{R}_+$ vérifie :
(i) $d(z,z') = 0$ si et seulement si $z = z'$.
(ii) $d(z,z') = d(z',z)$.
(iii) $d(z,z') \leq$ d (z, z'') +d (z'', z').
(iv) $d(g(z), g(z')) = d(z,z')$ pour tout $g \in$H.
(v)

Elle est appelée distance hyperbolique. Par construction, les transformations de H sont des isométries de l'espace métrique (**H**,d).
La distance d est reliée à la distance euclidienne par la relation suivante:

$$sh\left(\frac{d(z,z')}{2}\right) = \frac{|z-z'|}{2(Imz)^{\frac{1}{2}}(Imz')^{\frac{1}{2}}}$$

Où $sh(x)$ est la fonction sinus hyperbolique

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

En utilisant un développement limité de cette expression, on obtient une estimation de $d(z,z')$, avec z proche de z' :

$$\lim_{u \to 0} \frac{d(z, z+u)Imz}{|u|} = 1$$

Cette expression infinitésimale nous permet de construire dans **H** une notion de longueur hyperbolique $L_{\boldsymbol{H}}(c)$, associée à une courbe c de **H**.

Soit $c: [a,b] \to$**H** une courbe C^1, on pose $L_{\boldsymbol{H}}(c) = \int_a^b \frac{|c'(t)|}{Imc(t)} dt$

Si g est de la forme t_α, t_β ou s, on montre facilement l'égalité $L_{\boldsymbol{H}}(g(c)) = L_{\boldsymbol{H}}(c)$. On en déduit que les transformations du groupe H préservent la longueur hyperbolique des courbes.

Par analogie avec la géométrie euclidienne, on peut se demander si, étant donnés deux points $z \neq z'$ de **H,** il existe une courbe de **H** reliant z à z' de longueur hyperbolique minimale. Dans le cadre euclidien on sait qu'une telle courbe existe et est précisément le segment de droite entre z et z'. Dans **H**, la réponse est également positive :

Théorème *Soient z et $z' \in$ H. Notons S l'ensemble des courbes C^1 de **H** reliant z à z', il existe une unique courbe $c \in S$ telle que*

$$L_{\boldsymbol{H}}(c) = Inf_{c \in S} L_{\boldsymbol{H}}(c)$$

Si $Re(z) = Re(z')$, la courbe c est le segment euclidien vertical $[z,z']$.

*Sinon, z et z' appartiennent à un unique demi-cercle inclus dans **H** dont le diamètre est un segment de l'axe réel, et la courbe c est l'arc supporté par ce demi-cercle d'extrémités z et z'.*

La courbe c est appelée segment géodésique, c'est le chemin le plus court, au sens hyperbolique, pour aller de z à z'. Comme dans le plan euclidien, sa longueur hyperbolique est égale à la distance $d(z,z')$.

Dans ($\mathbf{H}$,$d, L_{\boldsymbol{H}}$), les demi-droites verticales et les demi-cercles dont le diamètre est un segment de l'axe réel, sont donc l'analogue des droites du plan euclidien. Ces courbes sont appelées géodésiques. La propriété suivante exprime le fait que le demi-plan de Poincaré muni de la distance d et de la longueur $L_{\boldsymbol{H}}$, ne vérifie pas l'axiome d'Euclide.

Propriété *Soient* z *un point de* **H** *et* c *une géodésique ne passant pas par* z, *il existe une infinité de géodésiques ne rencontrant pas* c *et passant par* z.

Dans cette géométrie, on constate qu'un sous-ensemble $A \subset \mathbf{H}$ n'est pas borné dans ($\mathbf{H}$,d) si et seulement si, ou bien il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers un réel, ou bien A n'est pas borné au sens euclidien. Un point en mouvement z' s'éloigne donc indéfiniment d'un point fixe z, s'il s'en éloigne au sens euclidien ou alors s'il s'approche de la droite des réels. Contrairement aux apparences (euclidiennes) un habitant de ce nouveau monde n'atteint donc jamais la droite des réels qui fait partie de son horizon, ou encore du bord à l'infini de H. Autrement dit, les nombres réels sont les étoiles du demi-plan de Poincaré.

Pavage et développement en fractions continues.

Paver un espace géométrique consiste à recouvrir cet espace par des motifs répétifs, sans trous, ni chevauchements. Le pavage est dit périodique s'il est obtenu en déplaçant le motif par un groupe de transformations.

Dans le plan euclidien, le pavage périodique le plus banal est celui obtenu en déplaçant un carré de côté unité par le groupe des translations entières

$$\{t(z) = z + p + iq; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$$

Dans ce paragraphe nous présentons un pavage périodique de **H** mettant en jeu le sous-groupe H$\mathbb{Z}$ de H défini par

$$\mathrm{H}\mathbb{Z} = \left\{\frac{az+b}{cz+d}; a, b, c\ et\ d \in \mathbb{Z}\ avec\ ad - bc = 1\right\}$$

Remarquons que les transformations $t(z) = z + 1$ et $s(z) = \frac{1}{-z}$ appartiennent à H$\mathbb{Z}$.
Introduisons l'ensemble :

$$D = \left\{z \in \boldsymbol{H};\ |z| \geq 1\ et - \frac{1}{2} \leq Re(z) \leq \frac{1}{2}\right\}$$

On montre que cet ensemble joue le rôle de pavé au sens où il vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\cup g \in$ H$\mathbb{Z}$ gD =**H**,
(ii) Si gD, avec $g \in$ H$\mathbb{Z}$ rencontre D en un point de l'intérieur de D, alors $g = Id$.

Ce pavage de **H** obtenu au moyen de D et du groupe H$\mathbb{Z}$ est un outil essentiel pour établir un lien entre la théorie des nombres et la géométrie du demi-plan de Poincaré. Il permet par exemple de lire le caractère rationnel d'un réel x. Pour cela, on "remplace" x par la demi-géodésique $[i,x)_{\boldsymbol{H}}$ d'origine i et d'extrémité x (qui est un arc de cercle), on a alors la caractérisation suivante :

Théorème *Un réel* x *est rationnel si et seulement si la demi- géodésique* $[i,x)_{\boldsymbol{H}}$ *ne rencontre qu'un nombre fini de domaines* $g(D)$, *avec* $g \in$ H$\mathbb{Z}$.

Le développement en fractions continues d'un réel x se lit également dans **H** au moyen d'un pavage, construit à partir des domaines g(D), mis en évidence au début du XIXème siècle, et attribué à J. Farey (1766−1826). C'est certainement pour cette raison que ce pavage porte le nom de pavage de Farey, bien que la contribution du mystérieux géologue soit tr`es lointaine.

Le pavé initial du pavage de Farey est le triangle hyperbolique T de **H** (dont les côtés sont des géodésiques de **H**), bordé par les deux demi droites verticales d'équations $x = 0\, et\, x = 1$, et par le demi-cercle euclidien de diamètre $[0, 1]$. Clairement les sommets de ce triangle appartiennent au bord à l'infini de **H**. On peut montrer que la ”nouvelle” aire de ce triangle au sens de la géométrie de Poincaré est finie alors que son périmètre (pour la nouvelle longueur) est infinie. Les images de T par le groupe Hℤ sont encore des triangles bord´es par des géodésiques de H dont les trois sommets sont à l'infini. On montre aisément que ces sommets sont des nombres rationnels et que les images de T recouvrent **H**, autrement dit :$\cup g$ ∈ Hℤ gT= **H**, sans se chevaucher.

Pour mettre en lumière le lien entre ce pavage et le développement en fractions continues d'un réel x, il est commode d'imaginer un point mobile dans le demi-plan de Poincaré, se dirigeant le long de la demi-géodésique $[i, x)_{\boldsymbol{H}}$. Sa trajectoire rencontre successivement des triangles du pavage de Farey. La suite de ces triangles visités est intimement reliée à la nature arithmétique de x.

Par exemple, si cette suite est finie, x est rationnel puisqu' à partir d'un certain temps, la trajectoire du point mobile reste incluse dans un triangle du pavage. On peut en savoir beaucoup plus en associant un signe aux côtés de ces triangles, selon une règle que nous allons décrire.

Pour fixer les idées, supposons que x soit un irrationnel compris entre 0 et 1. La demi- géodésique $[i, x)_{\boldsymbol{H}}$ rencontre successivement une infinité de côtés de triangles du pavage. Le premier côté est la demi-droite verticale d'équation $x = 0$ et le deuxième est le demi-cercle euclidien de diamètre $[0, 1]$. On associe `a chaque côté rencontré, différent du premier, le signe + si juste après avoir rencontré ce côté, le point mobile entre dans un triangle du pavage en laissant un seul sommet de ce triangle sur sa gauche, et le signe − s'il en laisse deux. Par exemple, si $x < 1$, le signe associé au deuxième côté est −. Par ce procédé géométrique, on obtient une suite d'entiers naturels non nuls $n_0, n_1, n_2, \ldots$ correspondant au nombre de côtés consécutifs de même signe. Dans les années 1980, C.Series a démontré, sur les traces de E.Artin, que cette suite est précisément celle intervenant dans le développement en fractions continues de x.

L'étude des pavages périodiques en géométrie de dimension 2, euclidienne ou non, est directement reliée à celle des surfaces. Ce dernier point de vue, que nous allons développer, permet de formuler en termes topologiques liés à l'excursion d'une trajectoire sur une surface, des propriétés portant sur l'incidence d'une courbe avec les motifs d'un pavage.

Des trajectoires sur une surface pour étudier les nombres.

Pour commencer, revenons au pavage périodique du plan euclidien ou plus simplement au cas de la feuille de papier quadrillée par des carrés unités. Fixons l'un de ces carrés et considérons une droite Δ illimitée le traversant. Pour rendre compte, au moyen d'un seul carré fixé, des différents carrés rencontrés par cette droite, on peut imaginer que ce carré est une table de billard et que la règle du jeu est la suivante : on lance une boule dans une direction parallèle à Δ, lorsque la trajectoire

de la boule rencontre un côté de la table, on replace la boule sur le côté opposé, en suivant une droite horizontale ou verticale, et on lance de nouveau la boule dans la direction Δ. Dans ce modèle, la droite Δ est devenue la trajectoire de la boule et chaque rencontre de la boule avec un côté de la table traduit la rencontre de Δ avec un carré du pavage.

Si maintenant l'on découpe le carré que l'on s'est fixé et si l'on recolle deux à deux les côtés parallèles, on obtient une surface ayant la forme d'une chambre à air, que l'on appelle un tore. Dans ce modèle fini, la trajectoire de la boule de billard, autrement dit la droite Δ, devient une courbe qui s'enroule autour de la surface.

Lorsque l'on applique un procédé analogue au pavage de Farey, ou plus précisément au domaine D associé au groupe H$\mathbb{Z}$, on obtient une surface appelée surface modulaire. Sa forme est celle d'une outre ayant un goulot infiniment long mais de plus en plus fin. Cette surface non euclidienne est infinie au sens où elle contient des points tr`es éloignés, en revanche son aire est finie. Comme dans l'exemple de la feuille de papier et du billard, une géodésique du demi-plan de Poincaré devient une courbe de la surface modulaire dont la topologie reflète l'incidence de cette courbe avec les triangles du pavage. En étant familier avec ce nouveau modèle, on peut réinterpréter les résultats que nous avons exposés dans le paragraphe précédent, sur le lien entre la trajectoire d'un point mobile le long de la demi-géodésique $[i,x)_{\boldsymbol{H}}$ et le développement en fractions continues de x.

On obtient par exemple que si x est un nombre rationnel, la trajectoire associée au point mobile sur la surface modulaire se dirige tout droit vers le goulot. En revanche si x est irrationnel, cette trajectoire passe infiniment souvent dans une partie finie de la surface. Si elle en sort, elle tourne autour du goulot avant d'y revenir. Sous ce nouvel éclairage, la suite d'entiers naturels $n_0, n_1, n_2, \ldots$ intervenant dans le développement en fractions continues de x devient un objet dynamique puisqu'elle est reliée à la suite des nombres de tours successifs que la trajectoire réalise à chaque passage dans le goulot de la surface. En rentrant plus profondément dans la géométrie, on montre que ce nombre de tours est d'autant plus grand que la trajectoire monte haut dans la partie infinie de la surface. Si cette trajectoire ne va pas au-delà d'une certaine hauteur, les termes de la suite $n_0, n_1, n_2, \ldots$ sont donc tous inférieurs à un même entier. Dans ce modèle le nombre d'or tient une place d'exception dans le sens où, parmi toutes les trajectoires, celle qui monte le moins haut est celle associée à ce nombre.

Traverser des champs mathématiques.

Le monde mathématique est fait d'idées dont le berceau est souvent la théorie des nombres. Lorsqu'elles sont profondes, ces idées traversent les spécialités, encore faut-il trouver le moyen de les faire circuler. C'est précisément ce que permettent les travaux de traduction, comme ceux que nous venons d'exposer. Dans ce même esprit, la célèbre conjecture connue sous le nom d'hypothèse de Riemann, se traduit en termes de courbes sur la surface modulaire. Cette conjecture, énoncée en 1856, qui porte sur la localisation des zéros dune fonction clef de la théorie des nombres, la fonction Zéta, est aujourd'hui l'un des problèmes ouverts les plus résistants. Le mathématicien D. Hilbert (1862- 1943) aurait dit d'elle : Si je devais me réveiller après avoir dormi mille ans, ma première question serait, l'hypothèse de Riemann a-t-elle été prouvée ?

L'approche dynamique des nombres apportera peut-être une réponse, bien avant que D. Hilbert ne se réveille.

Références.

F. Dal'Bo *Des trajectoires pour approcher les nombres*, Pour la Science (revue) Septembre 2007 Edition Belin

S. Katok *Fuchsian groups*. *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques.* Chicago Press

G. Courtois, F. Dal'Bo, F.Paulin- Edition Polytechnique (accès libre http://www.math.polytechnique.fr/xups/vol07.html)

F.Dal'Bo. *Trajectoires géodésiques et horocycliques*. Edition EDP Science/CNRS, "Savoirs actuels"

[1]Françoise Dal'Bo.
Université de Rennes 1, IRMAR, dalbo@univ-rennes1.fr