Journal de la Faculté des Sciences et Technologies
Volume 11, Numéro 2, pp. 16–22 (2015)

Sur le plongement des structures CR

On the embedding of CR structures

Hamidou DATHE * and Mansour SANE †

Résumé

On étudie le problème de plongement des variétés CR strictement pseudoconvexes de dimension 3. Comme application, on donne le nombre, à isotopie près, de structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur certains fibrés en tores sur le cercle.

Mots clés : Plongement CR, Remplissage des Structures de Contact, Fibrés en Tores sur S^1.

Abstract

We study the embedding problem of 3-dimensionnal strictly pseudoconvex CR manifold. For application we give the number, up to isotopy, of strictly pseudoconvex embeddable CR structures on some torus bundles over the circle.

Key words: CR Embedding, Contact structures Filling, Torus Bundle over S^1.
Mathematics Subject Classification 2010: 32V05, 53D35, 32V40.

1 Introduction

On s'intéresse au problème de plongement des structures CR. Une structure CR de type (n, d) sur une variété différentiable M, de dimension m, est un sous-fibré complexe $T^{10}M$, de rang n, du complexifié $TM \otimes \mathbb{C}$ du fibré tangent à M tel que $T^{10}M \cap \overline{T^{10}M} = 0$ et que l'espace des sections de classe C^∞ de $T^{10}M$ soit stable par crochet de Lie $(d = m - 2n)$. Nous nous consacrons ici aux structure pseudohermitiennes strictement pseudo-convexes qui sont des structures CR strictement pseudoconvexes de type $(n, 1)$. Soit $(M, T^{10}M)$ une variété CR, existe-t-il un plongement lisse $i : M \longrightarrow \mathbb{C}^N$ tel que les composantes de i vérifient les équations de Cauchy-Riemann tangentielles ? Cette question, appelée "problème de plongement" a été posée par J. J. Kohn dans [17]. Dans [22], Nirenberg a montré qu'il existe des variétés CR de dimension 3 non plongeables. De ce fait une importance particulière sera accordée aux variétés CR strictement pseudoconvexes de dimension trois qui supportent des structures CR strictement pseudo-convexes de type $(1, 1)$, et avec des applications sur les fibrés en tores sur le cercle.

2 Plongement des Structures CR

Soit M une variété différentiable orientable.

Définition 2.1. *Une structure CR sur M est aussi la donnée d'un sous-fibré réel HM de rang $2n$ de TM muni d'une structure presque complexe J_b tel que :*

$$[J_bX, Y] + [X, J_bY] \in \Gamma(M, HM) \tag{1}$$

$$[J_bX, J_bY] - [X, Y] = J_b([J_bX, Y] + [X, J_bY]) \tag{2}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(M, HM)$. On dira alors que (HM, J_b) est une structure CR réelle sur M.

*Département de Mathématiques et informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal ; et UMI 209, UMMISCO-IRD, UPMC, Paris. hamidou.dathe@yahoo.fr.

†Département de Mathématiques, UFR Sciences et Technologies, Université Assane Seck de Ziguinchor, Sénégal. sanemansour@yahoo.fr.

Soit $(M, T^{10}M)$ une variété CR de type hypersurface (c'est à dire de type $(n, 1)$) ; et posons $HM = \mathcal{R}_e(T^{10}M \oplus \overline{T^{10}M})$. Soit $J_b : HM \to HM$, $J_b(V + \overline{V}) = i(V - \overline{V})$. D'après [14], (HM, J_b) est une structure CR réelle sur M. Soit $E = \{\alpha \in T^*M : \alpha(X) = 0, \forall X \in \Gamma(M, HM)\}$. Puisque M est orientée et que HM est orienté par J_b, alors E est un fibré en droite trivial. Ainsi il existe une section $\theta \in \Gamma(E)$ globalement définie qui ne s'annule nulle part.

Définition 2.2. *La section θ est appelée structure pseudo-hermitienne sur M et on a $HM = \ker\theta$.*

Définition 2.3 (Formes de Levi)**.** *Soit θ une structure pseudo-hermitienne sur M. On définit la forme de Levi L_θ de θ par $L_\theta(Z, \overline{W}) := -id\theta(Z, \overline{W})$, pour tous $Z, W \in \Gamma(M, T^{10}M)$. On définit G_θ sur $\Gamma(M, HM)$ par $G_\theta(X, Y) := d\theta(X, J_bY) = -\theta[X, J_bY]$, pour tout $X, Y \in \Gamma(M, HM)$. G_θ est la forme de Levi associée à la structure CR réelle HM sur M.*

Définition 2.4. *(M, θ) est dite variété pseudo-hermitiennes strictement pseudoconvexes si une des formes L_θ et $G_\theta(X, Y)$ est définie positive.*

Ces types de variétés portent une direction caractéristique T qui est transverse à $HM = \ker\theta$ avec $\theta(T) = 1$, ainsi qu'une métrique riemannienne g_θ appelée métrique de Webster adaptée à T et à la structure presque complexe J_b sur HM : $g_\theta : TM = HM \oplus \mathbb{R}T \to \mathbb{R}$ avec : $g_\theta = \pi_H G_\theta + \theta \otimes \theta$, où $\pi_H : TM = HM \oplus \mathbb{R}T \to HM$, la projection sur HM et $\pi_H G_\theta$ le tenseur de type $(0, 2)$ défini par $(\pi_H G_\theta)(X, Y) = G_\theta(\pi_H X \pi_H Y)$, pour tout $X, Y \in TM$. Soit X une variété complexe de dimension complexe N et $M \subset X$ une sous-variété de dimension réelle m. Posons $T^{10}M = T^{10}X \cap (TM \otimes \mathbb{C})$ où $T^{10}X$ est le fibré tangent holomorphe à X. C'est-à-dire que localement $T^{10}X$ est engendré par $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^j};\ 1 \leq j \leq N\right\}$, où $(z^1, \ldots, z^N)$ sont des coordonnées complexes locales sur X. Posons $H_xM = T_xM \cap J(T_xM)$ où J est la structure complexe naturelle sur T_xX. En générale la dimension complexe de T^{10}_xM dépend de $x \in M$. Cependant si $\dim_{\mathbb{C}} T^{10}_x = n$ est constante, alors $(M, T^{10}M)$ est une variété CR de type $(n, d = m - 2n)$.

Définition 2.5. *On appelle sous-variété CR de type (n, d) de X toute sous-variété différentiable M, $\dim M = 2n + d$, telle que $\dim_{\mathbb{C}} T^{10}_xM = n$ est constante pour tout $x \in M$. Si de plus $d = 2N - m$, avec $m = \dim M$ et $N = \dim X$ alors on dit que la sous-variété CR M de X est générique.*

Exemple 2.1. *Toute hypersurface réelle de $\mathbb{C}^N$ est une sous-variété CR générique.*

Définition 2.6. *Soient $(M, T^{10}M)$ et $(N, T^{10}N)$ deux variétés CR abstraites de types donnés. Une application $f : M \to N$ est dite plongement CR si elle satisfait une des deux conditions suivantes :*

- *$(d_xf)(T^{10}_xM) \subset T^{10}_{f(x)}N$, pour tout $x \in M$ où d_xf est l'extension $\mathbb{C}$-linéaire à $T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de la différentielle de f en x.*
- *$(d_xf)(H_xM) \subset H_{f(x)}N$ et $(d_xf) \circ (J_{b,x}) = (J^N_{b,f(x)}) \circ (d_xf)$ pour tout $x \in M$.*

Si f est un plongement (respectivement un C^∞-diffeomorphisme), alors f est dite plongement CR (respectivement isomorphisme CR). En particulier un plongement $f : M \to \mathbb{C}^N$ est CR si $f_*(T^{01}M)$ est un sous-fibré du fibré complexe engendré par les champs $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_N}$. Ceci équivaut à $\overline{Z}f = 0$ pour tout $Z \in T^{10}M$. Ces équations sont dites de Cauchy-Riemmann tangentielles et sont notées par $\bar{\partial}_b f = 0$.

Définition 2.7. *Soit (M, T_{10}) une variété CR abstraite de type (n, d).*

1. *On dit que $(M, T^{10}M)$ est CR plongée si M est une sous-variété CR de $\mathbb{C}^N$.*
2. *On dit que $(M, T^{10}M)$ est plongeable s'il existe un plongement CR $i : M \to \mathbb{C}^N$ tel que $(i(M), i_*(T^{10}M)$ soit CR plongée.*

3 Variétés pseudo-hermitiennes et variétés de contact

Définition 3.1 ([6])**.** *Une structure de contact (coorientée) sur une variété différentiable M de dimension $2n+1$ est la donnée d'une distribution d'hyperplans $\mathcal{D}$ et d'une 1-forme η globalement définie sur M avec $\ker\eta = \mathcal{D}$ et $\eta \wedge (d\eta)^n$ est une forme volume sur M.*

Une variété de contact M est munie d'un champ de Reeb ξ qui est transverse à la distribution $\mathcal{D}$, d'un champ de tenseur φ de type $(1, 1)$ sur M tel que $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ et d'une métrique riemannienne g compatible avec $\mathcal{D}$ au sens où $g = \eta \otimes \eta + d\eta(\varphi\cdot, \cdot)$.

Définition 3.2. *Le quadruplet (ϕ, η, ξ, g) est appelé structure métrique de contact sur M.*

Définition 3.3. *Une structure sasakienne sur une variété M est une structure métrique de contact qui est normale au sens où la structure presque complexe $\mathcal{J}$ sur $M \times \mathbb{R}$, définie par*

$$\mathcal{J}\Big(X, f\frac{d}{dt}\Big) = \Big[\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\Big] \tag{3}$$

est une structure complexe.

Définition 3.4. *Soit (M, η_M) et (N, η_N) deux variétés de contact. Un contactomorphisme de M vers N est une application f telle que $f_*\eta_M = \eta_N$.*

Définition 3.5. *On dit qu'une variété de contact (M, η) est holomorphiquement remplissable si elle est contactomorphe au bord strictement pseudoconvexe d'une variété complexe compact X. Si X est de Stein, (M, η) est dite Stein remplissable.*

Remarque 3.1. *Soit X une variété complexe strictement pseudoconvexe et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'exhaustion spsh. Si X_a est un niveau régulier de f, alors X_a est une hypersurface strictement pseudoconvexe de X et le sous-ensemble compact $X_{\leq a} := \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ est une variété complexe compacte strictement pseudoconvexe à bord $bX_{\leq a} = X_a$. D'après [23], Proposition 2.4 le fibré tangent complexe $TX_a \cup J(TX_a)$ de X_a est la distribution de contact d'une structure de contact naturellement orientée sur X_a. Si X est de stein alors $X_{\leq a}$ est dite variété de Stein compact à bord X_a.*

Définition 3.6 ([9])**.** *Soit $(M, \mathcal{D} = \ker(\eta))$ une variété de contact.*

1. *Une variété W lisse est dite symplectique si elle est munie d'une 2-forme différentielle fermée et non dégénérée ω appelée forme symplectique.*
2. *M est dite faiblement symplectiquement remplissable s'il existe une variété symplectique (W, ω) à bord $bW = M$ et $\omega_{|\mathcal{D}} > 0$.*
3. *M est dite fortement symplectiquement remplissable s'il existe une variété symplectique (W, ω) à bord $bW = M$ et $d\eta = \omega_{|\mathcal{D}}$.*

Proposition 3.1. *remplissage holomorphe $\Rightarrow$ remplissage symplectique fort $\Rightarrow$ Remplissage symplectique faible.*

Démonstration. Par définition, remplissage symplectique fort $\Longrightarrow$ remplissage symplectique faible. Soit $(M, \mathcal{D})$ une variété de contact holomorphiquement remplissable. Alors M peut être réalisée comme bord strictement pseudoconvexe d'une variété complexe compacte X. Donc il existe une fonction d'exhaustion spsh $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $M = X_a$ est un niveau régulier de f. Soit $\omega_f = d\alpha_f$ avec $\alpha_f = -d^c f$ et $d^c = i(\partial - \overline{\partial})$ où $\partial = \sum_j \dfrac{\partial}{\partial z^j}$ et $\overline{\partial} = \sum_j \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}^j}$. Alors ω_f est une forme symplectique sur X et $\alpha_{f|M} = 0$ est une équation de $\mathcal{D}$ avec ici $\mathcal{D} = TM \cap J(TM)$, où J est la structure complexe naturelle sur X. Donc $(X_{\leq a}, \omega_f)$ est une variété symplectique à bord $bX_{\leq a} = M$. Ainsi $(M, \mathcal{D})$ est fortement symplectiquement remplissable. □

Proposition 3.2 ([19])**.** *Toute variété sasakienne est holomorphiquement remplissable.*

Remarque 3.2. *Soit maintenant (M, θ) une variété pseudo-hermitienne strictement pseudoconvexe, soit T sa direction caractéristique, soit g_θ sa métrique de Webster et soit J_b la structure complexe sur HM. Etendons J_b sur TM par $J_b^2 = -I + d\theta \otimes T$. Alors d'après les définitions 2.4 et 3.1 $(J_b, \theta, T, g_\theta)$ est une structure métrique de contact sur M. Cependant d'après Nicolaescu, [21, section 3.1], une variété métrique de contact (M, ϕ, ξ, η, g) est CR si et seulement si la condition suivante est satisfaite : $\phi N_\phi(X, Y) = 0$, pour tout $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ où N_ϕ est le tenseur de Nijenhuis de contact de M. Dans ce cas la variété CR est strictement pseudoconvexe.*

En dimension trois, on a le résultat de Blair suivant :

Proposition 3.3 ([1])**.** *Toute variété métrique de contact de dimension trois est une variété CR strictement pseudoconvexe. Ainsi, sur une variété de dimension 3, il existe une correspondance biunivoque naturelle entre les structures CR strictement pseudoconvexes et les structures de contact.*

4 Plongement et remplissage des structures pseudohermitiennes strictement pseudoconvexes

Définition 4.1. *Soit $(M, T^{10}M)$ une variété CR (compacte) strictement pseudoconvexe de type hypersurface. On dit que M est une variété CR remplissable s'il existe une variété compacte complexe et connexe X à bord strictement pseudoconvexe $(M, T^{10}M)$. La variété X est alors appelée remplissage CR de M.*

Proposition 4.1. *Une variété CR M (compact) est remplissage si et seulement si elle est plongeable.*

Démonstration. Soit M une variété CR (compact) est plongeable, alors d'après le théorème de Harvey-Lawson ([15]), M est remplissable. Soit maintenant M une variété CR remplissable et soit X un remplissage CR de M, * alors d'après [13], X peut être pris comme un espace de Stein à singularités isolée, et d'après [10], il existe un plongement propre d'une vatiété de Stein de dimension n dans $\mathbb{C}^q$ où q est le plus petit entier strictement supérieur à $(3n+1)/2$. □

Proposition 4.2 ([3])**.** *Toute variété CR strictement pseudoconvexe compact de type $(n, 1)$ est plongeable si $n \geq 2$.*

Pour des exemples de variétés CR non plongeables, on peut consulter [16] et [20]. Pour $n = 1$, on a un exemple classique de H. Rossi [24] (voir aussi [5] et [11]) qui a montré qu'une petite perturbation analytique réelle quelconque de la sphère de dimension 3 n'est pas plongeable.

Proposition 4.3. *Si une variété CR strictement pseudoconvexe $(M, J_b, T, \theta, g_\theta)$ est remplissable, alors la variété de contact (M, θ) (de distribution de contact HM) est holomorphiquement remplissable.*

Démonstration. Soit $(M, J_b, T, \theta, g_\theta)$ une variété CR strictement pseudoconvexe remplissable. Il existe une variété compacte complexe et connexe X dont la variété de contact (M, θ) est le bord strictement pseudoconvexe de X. Donc (M, θ) est holomorphiquement remplissable. □

En combinant les propositions 4.1 et 4.3 on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.4. *Si une variété CR (M, HM, J_b) strictement pseudoconvexe de type hypersurface est plongeable alors la variété de contact $(M, \mathcal{D} = HM)$ est holomorphiquement remplissable.*

D'après un travail récent d'Eliashberg, toute variété de dimension 3 a une infinité de structures de contact non équivalentes. La plupart de ces structures de contact ne supportent aucune structure CR remplissable. En dimension trois on a le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Une structure CR de type $(1, 1)$ est remplissable si et seulement si sa structure de contact correspondante est holomorphiquement remplissable.*

Démonstration. Soit M une variété CR remplissable de type $(1, 1)$ et soit θ sa structure pseudohermitienne. D'après la Proposition 4.3, la variété de contact (M, θ) est holomorphiquement remplissable. Soit maintenant une variété de contact (M, η, ξ) de dimension 3, holomorphiquement remplissable. Soit f un contactomorphisme de (M, θ, ξ) vers le bord bX strictement pseudoconvexe d'une variété complexe compacte X. Soit (M, θ, T) la variété pseudohermitienne strictement pseudoconvexe associée. On a $\theta = \eta$ et $T = \xi$. f est aussi un CR-isomorphisme de (M, θ, T) vers bX muni de la structure CR associée à la structure de contact naturellle sur bX (voir 3.1). En effet soient (HM, J_1, T_1) et (HbX, J_2, T_2) les structures CR réelles sur M et sur bX. D'une part on a $f_* H_x M = H_{f(x)} bX$, pour tout $x \in M$. D'autre part $df(J_1(T_1)) = 0 = J_2(T_2) = J_2(df(T_1))$ et pour tout $Z \in T^{10}M$, on a $df(J_1(Z + \overline{Z})) = df(i(z - \overline{Z})) = idf(Z) - idf(\overline{Z})$ et $J_2(df(Z + \overline{Z})) = J_2(df(Z) + df(\overline{Z})) = idf(Z) - idf(\overline{Z})$; par suite $df \circ J_1 = J_2 \circ df$. D'où (M, θ, T) est une structure CR remplissable. □

Le résultat principal de cette partie est la proposition suivante.

Proposition 4.6. *Soit (M, θ, J_b, T) une variété pseudohermitienne (compact) et strictement pseudoconvexe de dimension trois. Alors M est plongeable si et seulement si la variété de contact $(M, \eta = \theta, \xi = T)$ qui lui correspond est holomorphiquement remplissable.*

Démonstration. Il suffit de combiner la Proposition 4.1 et la Proposition 4.5. □

5 Applications aux fibrés en tores sur le cercle

Considérons le tore réel $\mathbb{T}^3$ de dimension 3 muni du système de coordonnées $(x, y, \theta) \in [0,1] \times [0,1] \times [0, 2\pi]$. Soit la structure pseudo-hermitienne strictement pseudoconvexe sur $\mathbb{T}^3$ définie par le sous-fibré $T^{10}\mathbb{T}^3$ de $TM \otimes \mathbb{C}$: $T^{10}\mathbb{T}^3 = \mathrm{vect}\{\partial_x + \cot(\theta)\partial_y + i(\partial_x + \cot(\theta)\partial_y);\ \partial_\theta + i\partial_\theta\}$. C'est la structure pseudo-hermitienne strictement pseudoconvexe standard sur $\mathbb{T}^3$ dont la distribution de Levi est le sous-fibré HM de TM défini par :

$$HM = \mathrm{vect}\{\partial_x + \cot(\theta)\partial_y;\ \partial_\theta\}. \tag{4}$$

Le résultat suivant est la version CR du résultat de Eliashberg dans [9].

Théorème 5.1. *unique structure CR plongeable sur $\mathbb{T}^3$ La structure CR standart $T^{10}\mathbb{T}^3$ sur $\mathbb{T}^3$ est l'unique structure pseudo-hermitienne plongeable.*

Démonstration. Soit $\eta_n = \cos(n\theta)dx + \sin(n\theta)dy$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; c'est la suite de formes de contact sur $\mathbb{T}^3$ de distributions de contact $\mathcal{D}_n = \mathrm{vect}\{\partial_x + \cot(n\theta)\partial_y; \partial_\theta\}$. D'après [9, Corollaire 2.3], la structure de contact $\mathbb{D}_1$ est l'unique qui soit holomorphiquement remplissable sur $\mathbb{T}^3$. Donc d'après la Proposition 4.6 sa structure CR qui lui est canoniquement associée est la seule qui soit plongeable et d'après la relation (4) cette structure CR est exactement la structure CR standart sur $\mathbb{T}^3$. □

Pour le cas des fibrés T^3_A en tore sur le cercle, de matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, le résultat de F. Ding et H. Geiges dans [8] montre que pour la famille complète à difféomorphisme près de structures de contact $\mathcal{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$, deux à deux non difféomorphiques, il existe un entier à partir duquel les $\mathcal{D}_n$ ne sont pas fortement symplectiquement remplissables, donc ne sont pas holomorphiquement remplissables. Ainsi il est une question naturelle d'étudier l'existence de structure CR strictement pseudoconvexes plongeables sur T^3_As. On a le théorème suivant.

Théorème 5.2 (Existence de Structure CR strictement pseudoconvexe plongeable sur T^3_A ou T^3_{-A})**.** *Soit T^3_A un fibré en tore $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors on a au moins une des conditions suivantes :*
- *T^3_A porte une structure CR strictement pseudoconvexe plongeable ;*
- *T^3_{-A} porte une structure CR strictement pseudoconvexe plongeable.*

Démonstration. Soit T^3_A un fibré en tore $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. D'après le théorème d'existence de structures de contacts holomorphiquement remplissables sur T^3_A de J. Van Horn-Morris [26], qui est une version gén'erale de celui de Dathe et Khoulé ([7]), T^3_A ou T^3_{-A} porte une structure de contact Stein remplissable. Puisqu'en dimension trois le remplissage Stein est équivalent au remplissage holomorphe (voir [2]), donc on a le résultat grace à la Proposition 4.6 □

Soit maintenant $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $|\mathrm{trace}(A)| = 2$. On a le résultat suivant de C. P. Boyer ([4]).

Proposition 5.1 ([18])**.** *Soit M une variété orientée fermée de dimension trois qui porte une métrique à courbure scalaire strictement positive. Soit $\mathcal{F}_M$ l'espace des structures de contact symplectiquement remplissables. Alors, $|\mathcal{F}_M| \leq |Tor(H_1(M;\mathbb{Z}))|$, où $Tor(H_1(M;\mathbb{Z}))$ est le sous-groupe de torsion de $H_1(M;\mathbb{Z})$ et $|\cdot|$ désigne le cardinal.*

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la Proposition 5.1 et de la Proposition 3.1.

Corollaire 5.1. *Soit M une variété orientée fermée de dimension trois qui porte une métrique à courbure scalaire strictement positive. Alors, $\mathcal{HF}_M \leq |Tor(H_1(M;\mathbb{Z}))|$, où $\mathcal{HF}_M$ désigne le nombre de structures de contact holomorphiquement remplissables sur M à isotopie près.*

Considérons le groupe de Heisenberg Nil^3 de dimension trois. On a la

Proposition 5.2 ([4])**.** *Soit M une variété compacte de dimension 3 qui est difféomorphique à un quotient à gauche du groupe de Heisenberg Nil^3 de dimension 3, alors l'unique structure Sasakienne qui descend au quotient est la structure Sasakienne standart.*

Proposition 5.3 ([12])**.** *Les quotients à gauche du groupe de Heisenberg Nil^3 sont exactement les fibrés T^2 sur S^1 à monodromie $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où la projection de fibre est induite par l'application $(x, y, t) \mapsto y$.*

Théorème 5.3 (Caractérisation des structures de contact holomorphiquement remplissables sur T_A^3 avec $|\text{trace}(A)| = 2$)**.** *Soit T_A^3 un fibré $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ non périodique satisfaisant |trace(A)|=2 et $\mathcal{HF}$ le nombre de structures de contact holomorphiquement remplissables sur T_A^3 à isotopie près. Alors on a $1 \leq \mathcal{HF} \leq 3$.*

Démonstration. D'après la Proposition 5.3 M est un quotient à gauche de Nil^3. Selon P. Scott [25], Tout quotient à gauche compact de Nil^3 est difféomorphique à l'une des quotients de la forme Nil^3/Γ_k, $k \in \mathbb{Z}\backslash 0$, où le sous groupe discret Γ_k de Nil^3 est le treillis engendré par les éléments $(k, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Selon [4], Γ_k est obtenu en restreignant les coordonnées (x,y,t) de Nil^3 à prendre valeurs dans l'ensemble des entiers divisibles par k et $H_1(M, Nil^3/\Gamma_k) = \mathbb{Z}^{2n} + \mathbb{Z}_k$. On a donc $H_1(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}_k$, $k = 1, 2, 3$. Par suite $|Tor(H_1(M;\mathbb{Z}))| \in \{1, 2, 3\}$. Puisque M est une variété sasakienne alors d'après [1], M porte une métrique à courbure scalaire positive. Alors d'après le corollaire 5.1, on a $0 \leq \mathcal{HF}_M \leq 3$. En combinant cela avec la Proposition 5.2, et la Proposition 3.2, on a $1 \leq \mathcal{HF}_M \leq 3$. □

La version CR de ce théorème est le théorème de caractérisation des structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur T_A^3 avec $|\text{trace}(A)| = 2$. Il s'agit du théorème suivant.

Théorème 5.4. *Soit T_A^3 un fibré $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ non périodique satisfaisant |trace(A)| = 2 et $\mathcal{CRP}$ le nombre de structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur T_A^3 à isotopie près. Alors on a $1 \leq \mathcal{CRP} \leq 3$.*

Références

[1] David E. Blair : *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Lecture notes in mathematics, vol. 509, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[2] Bogomolov, F.A., de Oliveira, B. : *Stein Small Deformations of Strictly Pseudoconvex Surfaces.* Contemporary Mathematics 207 (1997), 25-41.

[3] L. Boutet de Monvel : *Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles*, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974-1975 ; Équations aux derivées partielles linéaires et non linéaires, Centre Math., École Polytech., Paris, 1975, pp. Exp. No. 9, 14.

[4] C. P. Boyer : *Sasakian Geometry of the Heisenberg Group*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 52(100) No. 3(2009), 251-262.

[5] D. M. Burns : *Global behavior of some tangential Cauchy-Riemann equations* , Partial differential equations and geometry (Proc. Conf., Park City, Utah, 1977), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 48, Dekker, New York, 1979, pp. 51-56.

[6] H. Dathe : *Feuilletages des variétés fibrées et structures de contact.* Editions Universitaires Européennes, Sudwestdentschw, Verlag (Allemagne) (2012).

[7] H. Dathe and C. Khoulé : *Existence of holomorphically fillable contact structures on some T2 bundles over S1.* Journal of Mathematical Sciences : Advances and Applications, Volume 18, Number 1-2, 2012, Pages 29-45.

[8] F. Ding and H. Geiges : *Symplectic fillability of tight contact structures on torus bundles,* Alg. and Geom. Topol. 1 (2001), 153-172.

[9] Ya. Eliashberg : *Unique holomorphically fillable contact structure on the* $3-$*torus*, Internat. Math. Res. Notices 1996, 77-82.

[10] Y. Eliashberg and M. Gromov : *Embedding of Stein Manifolds of dimension n into the affine space of dimension* $\frac{3n}{2}+1$, Ann. Math, 136 (1992), 123-135.

[11] E. Falbel : *Nonembeddable CR-manifolds and surface singularities*, Invent.Math. 108 (1992), no. 1, 49-65.

[12] H. Geiges and J. Gonzalo : *Contact circles on 3-manifolds*, J. Diff. Geom. 46(1997), 236-286.

[13] H. Grauert : *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. 146 (1962), 331-368.

[14] S. Greenfield : *Cauchy-Riemann equations in several variables*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 22(1968), 275-314.

[15] R. Harvey and H.B. Lawson : *On the boundaries of complex analytic varieties, I*, Ann. of Math. 102(1975), 223-290.

[16] H. Jacobow and F. Treves : *Non-realizable CR structures*, Invent. Math. 66 (1982), 231-249.

[17] J.J. Kohn : *Boundaries of complex manifolds*, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis, 1964, Springer-Verlag, New York, 1965, pp. 81-94.

[18] P. Lisca : *On fillable contact structures up to homotopy*, Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol. 129, Number 11(2001) 3437-3444.

[19] G. Marinescu and N. Yeganefar : *Embeddibility of some strongly pseudoconvex CR manifolds.* ArXiv :math/0403044v1 [math.CV] 02 Mars 2004.

[20] A. Meziani : *Perturbation of a class of CR structures of codimension larger than one*, J. Funct. Anal. 116 (1993), 225-244.

[21] Liviu Nicolaescu. : *Geometric connections and geometric Dirac operators on contact manifolds.* Différential Geometry and its Applications, 22 :355378, 2005.

[22] L. Nirenberg : *On a question of Hans Lewy*, Russian Math. Surveys 29 (1974), 251-262.

[23] P. Popescu-Pampu : *Topologie de contact et singularités complexe.* Mémoire d'habilitation de l'université de Paris 7 Denis Diderot soutenu le 09 décembre 2008.

[24] H. Rossi65 : *Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary*, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis 1964, (Aeppli, Calabi and Röhrl eds.), Springer-Verlag, (1965), 242-256.

[25] P. Scott : *The geometry of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. 15(1983), 401-487.

[26] J. Van Horn-MorrisConstruictions of open book decompositions DISSERTATION Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of DOCTOR OF PHILOSOPHY, August 2007.