Journal de la Faculté des Sciences et Technologies
Volume 11, Numéro 2, pp. 7–15 (2015)

Formes Normales Symplectiques des Systèmes Hamiltoniens Complètement Intégrables: Cas Hyperbolique

Symplectic Normal Forms of Completely Integrable Hamiltonian Systems : Hyperbolic case

Hamidou DATHE * and Yatma MBODJI †

Résumé

Sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$, on considére un système hamiltonien complètement intégrable de classe C^∞ à n degrés de liberté admettant une singularité de type hyperbolique. On montre que la méthode d'Eliasson dans le cas d'une singularité elliptique peut être textuellement reprise pour obtenir une forme normale symplectique dans le cas d'une singularité hyperbolique.

Mots clés : variété symplectique, système hamiltonien complètement intégrable, singularité, singularité hyperbolique.

Abstract

On a symplectic manifold (M, ω) of dimension $2n$, we consider a completely integrable Hamiltonian system of class C^∞ with n degrees of freedom having a singularity of hyperbolic type. We show that the Eliasson method in the case of elliptic singularity may be word for word taken again to obtain a symplectic normal form in the case of hyperbolic singularity.

Key words: symplectic manifold, completely integrable Hamiltonian system, singularity, singularity of type hyperbolic.

1 Introduction

Dans ce travail nous nous intéressons à la géométrie des systèmes hamiltoniens complètement intégrable dans le cas C^∞. Sur une variété symplectique (M^{2n}, ω) de classe C^∞, un système hamiltonien complètement intégrable est la donnée de n fonctions à valeurs réelles $f_1, \ldots, f_n$ de classe C^∞ en involution pour le crochet de Poisson défini par la structure symplectique, et dont les différentielles sont presque partout linéairement indépendantes. Un tel système définit une action hamiltonienne locale de $\mathbb{R}^n$ dans M^{2n}, d'application moment $\mu : M^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto (f_1(p), \ldots, f_n(p)) \in \mathbb{R}^n$ et dont les orbites sont génériquement les fibres lagrangiennes $\mu^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^n$ qui définissent un feuilletage lagrangien singulier. La complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens est un problème trés ancien. On sait d'après Joseph Liouville ([9]) que si $p \in M^{2n}$ est un point régulier de μ, le système $(f_1, \ldots, f_n)$ peut être complété en un système de coordonnées symplectiques $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ au voisinage de p.

Si maintenant $p \in M^{2n}$ est une singularité non dégénérée de μ, peut-on trouver un système de coordonnées symplectiques dans lequel les fonctions hamiltoniennes $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'expriment simplement ? Cette question a été considérée par plusieurs auteurs dont Eliasson qui, aprés avoir introduit la notion de singularité non dégénérée, donne une description simple du système au voisinage d'une singularité non dégénérée de type elliptique dans un système de coordonnées symplectiques (voir [7]) (forme normale symplectique). Dans le même ordre d'idées San $V\widetilde{u}$ Ngoc et Christophe Wacheux, avec une méthode tout

*Département de Mathématiques et informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal ; et UMI 209, UMMISCO-IRD, UPMC, Paris. hamidou.dathe@yahoo.fr.

†Département de Mathématiques et informatique, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal. yatmambodji87@hotmail.fr.

à fait différente (voir [15]) donnent une description explicite du système au voisinage d'une singularité non dégénérée de type foyer-foyer en dimension quatre dans un système de coordonnées symplectiques. Une autre démonstration de ce résultat de Ngoc et Wacheux a été donnée par Marc Chaperon de manière plus simple (voir [3]). Dans ce travail on montre qu'en présence d'une singularité non dégénérée de type hyperbolique, la méthode d'Eliasson permet d'obtenir une forme normale symplectique du système.

2 Préliminaires

(M^{2n},ω) désigne une variété symplectique de dimension $2n$, $C^\infty(M^{2n},\mathbb{R})$ l'algèbre réel des fonctions différentiables de classe C^∞, $f_1,\dots,f_n \in C^\infty(M^{2n},\mathbb{R})$, $\mathbf{f}$ la sous-algèbre de $C^\infty(M^{2n},\mathbb{R})$ engendrée par le système $\{f_1,\dots,f_n\}$, et $p\in M^{2n}$ une singularité non dégénérée de type hyperbolique.

Définition 2.1. *Soit $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, on définit le champ de vecteurs hamiltonien associé à f comme l'unique champ de vecteurs X_f satisfaisant $i_{X_f}\omega=-df$.*

Définition 2.2. *Soient $f_1,\dots,f_n\in C^\infty(M^{2n},\mathbb{R})$. Le système $\{f_1,\dots,f_n\}$ est un système hamiltonien complètement intégrable si les conditions suivantes sont satisfaites :*
- *$\{f_i,f_j\}=\omega(X_{f_i},X_{f_j})=0$, pour tout i,j ;*
- *le système $\{df_1\dots df_n\}$ est presque partout linéairement indépendant.*

Nous allons à présent introduire la notion de singularité non dégénérée. Mais pour cela nous avons besoin d'introduire la notion de sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple.

Définition 2.3. *Une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple est une sous-algèbre abélienne maximale égale à son centralisateur.*

Définition 2.4. *Soit $(f_1,\dots,f_n)$ un système hamiltonien complètement intégrable d'application moment μ, $p\in M^{2n}$ un point critique de rang zéro de μ. On note par $\mathcal{H}(f_i)$, $1\le i\le n$ les formes quadratiques définies sur (T_pM^{2n}) par : pour tout $u\in(T_pM)$, $\mathcal{H}(f_i)(u)=d_p^2f_i(u,u)$, $1\le i\le n$. Le point p est une singularité non dégénérée(ou de Morse) si l'algèbre de Lie C_μ engendré par le système $\{\mathcal{H}(f_1),\dots,\mathcal{H}(f_n)\}$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre des formes quadratiques $Q(2n)$.*

Le problème de classification des singularités non dégénérées peut être regardé en termes de sous-algèbres de Cartan de $Q(2n)$. Les singularités non dégénérées sont très bien comprises grâce au résultat de Williamson[17]. Rappelons ce résultat précis,

Théorème 2.1 (Williamson [17])**.** *Pour toute sous-algèbre de Cartan C de $Q(2n)$ il existe un système de coordonnées symplectiques $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et une base $\{q_1,\dots,q_n\}$ de C tel que chaque q_i est donné par les expressions suivantes :*
- *$q_i=x_i^2+y_i^2$, $1\le i\le ke$ (elliptique) ;*
- *$q_i=x_iyi$, $ke+1\le i\le ke+kh$ (hyperbolique) ;*
- *$q_i=x_iy_{i+1}+x_{i+1}y_i$; $q_{i+1}=x_iy_i+x_{i+1}y_{i+1}$, $i=ke+kh+2j+1$, $1\le j\le k_f$ (focus-focus).*

Le système linéaire donné par les fonctions q_i est appelé le modèle linéaire de la singularité. Les fonctions $(q_i)_{1\le i\le n}$ constituent une base standard de C. Le théorème de Williamson[17] peut être vu comme le théorème des formes normales donné dans l'introduction pour le modèle linéaire. Nous allons attaché un triplet d'entiers naturels $(ke;kh;kf)$ à la singularité non dégénérée p de μ, oú ke désigne le nombre de composantes elliptiques dans le modèle linéaire, kh et kf le nombre de composantes hyperboliques et foyer-foyer dans le modèle linéaire respectivement. En vertu du théorème de Williamson[17] ce triplet est un invariant du système linéaire. C'est la raison pour laquelle le triplet est appelé le type de Williamson de la singularité p. Si le triplet $(ke;kh;kf)$ est égale à $(ke,0,0)$, on dit que p (resp. C_μ) est une singularité (resp. une algèbre de Cartan) non dégénérée de type elliptique. Si le triplet $(ke;kh;kf)$ est égale à $(0,kh,0)$ respectivement à $(0,0,kf)$, on dit que p (resp C_μ) est une singularité respectivement une sous-algèbre de Cartan non dégénérée de type hyperbolique respectivement foyer-foyer. La sous-algèbre de Cartan hyperbolique définie par un système hamiltonien complètement intégrable de classe C^∞ admet des espaces vectoriels et ensembles singuliers.

Définition 2.5. *Soit $(f_1, \ldots, f_n)$, un système hamiltonien complètement intégrable sur une variété symplectique (M^{2n}, ω), $p \in M^{2n}$ une singularité hyperbolique, et C_μ la sous-algèbre de Cartan hyperbolique de $Q(2n)$ engendrée par le système $\{\mathcal{H}(f_1), \ldots, \mathcal{H}(f_n)\}$. On appelle espace singulier de rang $r \leq n$ de C_μ l'ensemble noté $S_r(C_\mu)$, défini par :*

$$S_r(C_\mu) = \{X \in T_pM^{2n} \mid rg(i_X d_p^2 q_1, \ldots, i_X d_p^2 q_n) \leq r\}$$

où $(q_1, \ldots, q_n)$ est une base standard de C_μ.

Les espaces vectoriels singuliers de la sous-algèbre de Cartan hyperbolique C_μ vérifient la propriété suivante.

Proposition 2.1. *Les espaces singuliers de rang $r \leq n$ de la sous-algèbre de Cartan hyperbolique C_μ sont des sous-espaces vectoriels symplectiques de (T_pM^{2n}, ω_p) de dimension $2r$.*

Démonstration. Soit $(q_j = x_j y_j)_{j=1\ldots n}$ une base standard de q et X un élément de T_pM^{2n}. Nous avons $i_X d_p^2 q_j = (0, \ldots, Y_j, 0, \ldots, X_j, 0, \ldots, 0)^t$, où, si u est un vecteur colonne, u^t désigne la transposée de u ; donc $S_r(C_\mu) = \{X = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \in T_pM^{2n} \mid X_{r+i} = Y_{r+i} = 0, i = 1, \ldots, (n-r)\}$. Posons maintenant $e_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}, 0, \ldots, 0)$ et $f_i = (0, \ldots, 0, \delta_{i1}, \ldots, \delta_{in})$, $i = 1, \ldots, r$. Le système de vecteurs $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots f_r)$ est une base de $S_r(C_\mu)$. Soit $X \in S_r(C_\mu) \cap S_r^\perp(C_\mu)$. Alors $X = (X_1, \ldots, X_r, 0, \ldots, 0, Y_1, \ldots, Y_r, 0, \ldots, 0)$ et $X^* J_p X = 0$. Autrement dit $X_1^2 + \cdots + X_r^2 + Y_1^2 + \cdots + Y_r^2 = 0$. Par conséquent, $X_1 = \cdots = X_r = Y_1 = \cdots = Y_r = 0$. □

De la preuve ci-dessus découle les assertions suivantes :
— $S_r(C_\mu) = \cup_{l \leq r} S_l(C_\mu)$,
— $S_r(C_\mu) = E_1 + \cdots + E_r$ où $E_i = \{(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n) \in T_pM \mid X_j = Y_j = 0, j \neq i\}$

Définition 2.6. *Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ un système hamiltonien (C^∞) complètement intégrable sur (M^{2n}, ω), et $p \in M^{2n}$ une singularité hyperbolique. Soit $\mathbf{f}$ l'algèbre de lie engendré par les fonctions hamiltoniennes du système. On appelle ensemble singulier de rang $r \leq n$ de $(f_1, \ldots, f_n)$ l'ensemble noté $S_r(\mathbf{f})$, défini par*

$$S_r(\mathbf{f}) = \{x \in M^{2n} \mid rg(d_x f_1, \ldots, d_x f_n) \leq r\}.$$

Les ensembles singuliers d'un système hamiltonien complètement intégrable vérifient les propriétés suivantes.
— Si une fonction hamiltonienne h commute avec l'algèbre $(\mathbf{f})$, alors son flot hamiltonien préserve les ensembles singulier $S_r(\mathbf{f})$.
— Si N est une sous-variété de dimension $2r$, préservée par le système alors $N \subseteq S_r(\mathbf{f})$.

Dans la section qui suit on présente le lemme de Morse pour la singularité hyperbolique. Le problème de division sur les espaces singuliers, et la construction des variétés singulières s'avèrent être les difficultés essentielles dans la preuve du lemme de Morse pour les systèmes hamiltoniens complètement intégrables (Cas de la singularité hyperbolique). Ainsi nous commencerons à étudier le problème de division et la construction des variétés singulières avant de faire la preuve du lemme de Morse pour la singularité hyperbolique.

3 Le Lemme de Morse pour les systèmes intégrables cas hyperbolique

✓Problème de division

Soit $\mathbb{R}^{2n}$ munie du système de coordonnées canoniques $z = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, et soit $q_i = x_i y_i$ et $E_i = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_i = y_j = 0, i \neq j\}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et soit $S_r = S_r(q)$, $r \leq n$. Soit J la matrice définie par $J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$, et soit $\langle , \rangle$ la mêtrique euclidienne sur $\mathbb{R}^{2n}$. Désignons par $O(i)$, $i = 1, \ldots, n$ l'ensemble des germes f d'application différentiables de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $f_{|E_i^\perp} = 0$.

Lemme 3.1. *Soit X un germe de champ de vecteurs de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $\langle X, dq_i \rangle = 0$ pour tout i, alors il existe d'uniques germes $c_1, \ldots, c_n$ de fonction de classe C^∞ tel que $X = \sum_{i=1}^n c_i J dq_i$*

Démonstration. Il suffit de faire la preuve pour $n = 1$. Comme $\langle X(x,y), dq_1(x,y)\rangle = yX_1 + xX_2 = 0$, alors $X_1 + y\frac{\partial X_1}{\partial y} + x\frac{\partial X_2}{\partial y} = 0$ et $y\frac{\partial X_1}{\partial x} + x\frac{\partial X_2}{\partial x} + X_2 = 0$. Donc $X_1 = -y\frac{\partial X_1}{\partial y} - x\frac{\partial X_2}{\partial y}$ et $X_2 = -y\frac{\partial X_1}{\partial x} - x\frac{\partial X_2}{\partial x}$. Posons $c_1 = \left(-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial X_1}{\partial y} - \dfrac{\partial X_2}{\partial y}\right)$. Il est facile de voir que c_1 est une germe C^∞ de fonction et de plus $X = c_1 J dq_1$. $\square$

Lemme 3.2. *Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espace vectoriels de S_r, $(f_1, \ldots, f_m)$ m-germes de fonctions de classe C^∞ définies respectivement sur $(F_i, 0)$, et ϕ_i des germes de difféomorphismes de classe C^∞ sur $(F_i, 0)$. On suppose que $f_i = f_j$ sur $F_i \cap F_j$ $\forall\ i, j$, alors il existe un germe f de fonction différentiable de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $f_{|F_i} = f_i$. On suppose aussi que $\phi_i = \phi_j$ sur $F_i \cap F_j$ $\forall\ i, j$, alors il existe un germe ϕ de fonction différentiable de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $\phi_{|F_i} = \phi_i$.*

Démonstration. La démonstration se fait par induction sur m. Si $m = 1$, alors le résultat est vrai. Si $m = 2$ on définit $f(z) = f_1(\pi_E)$. Il est claire que $f_{|F_1} = f_1$. Puisque $F_2 = F_2 \cap F_1 + F_2 \cap F_1^\perp$, alors $f_{|F_2} = f_{1|F_1\cap F_2} = f_2$.
Supposons que le résultat est vrai au rang $(m-1)$. Montrons que le résultat est vrai au rang m. D'après ce qui précède il existe un germe C^∞ de fonction g sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $g_{|F_i} = f_i$ pour tout $i = 1, \ldots, m-1$. Les germes de fonction g et f_m vérifient les hypothèses du lemme 3.2, donc il existe un germe C^∞ de fonction f sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $f_{|F_i} = g$ $i = 1, ..., m-1$ et $f_{|F_m} = f_m$. Comme $g_{|F_i} = f_i$, alors $f_{|F_i} = f_i$, $i = 1, \ldots, m$. La construction de ϕ est complètement analogue. $\square$

Lemme 3.3. *Soient $f_1, \ldots, f_n$, des germes de fonctions de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ qui sont identiquement nuls sur S_{n-1}. Soit $B = (b_{ij})$ une germe de matrice d'ordre $n\times n$ non dégénérée de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$. Alors il existe n-germes de fonctions de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $f_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j$ et $g_j \in O(j)$, pour tout $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.*

Démonstration. Pour tout sous-espace vectoriel E de S_n, $E = F_1 + \cdots + F_n$, on désigne par D^E l'ensemble des germes C^∞ de fonctions sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ vérifiant $f_{|F_i^\perp} = 0$, pour tout $i \leq n$. Si f est identiquement nulle sur S_{n-1}, alors elle se décompose de manière non unique comme suit : $f = \sum_{E\langle S_n} f^E$, $f^E \in D^E$. En fait, considérons E un sous-espace vectoriel de S_n et posons $f^E = f \circ i_E \circ \pi_E$. Soit $X \in F_i^\perp$. Comme $XJe_i = X_i = 0$ et $XJf_{n+i} = X_{n+i}0$, alors $X \in S_{n-1}$. D'où $F_i^\perp \subset S_{n-1}$. Et puisque f est identiquement nul sur S_{n-1}, alors f est identiquement nul sur $F_i^\perp$ pour tout $i \leq n-1$; ce qui signifie que $f^E \in D^E$. Soit E et E' deux sous-espaces vectoriel de S_n tels que $E \neq E'$. On a $E \cap E' \subseteq S_{n-1}$ ou $E \cap E' \subseteq E_n$, et $f \circ i_{E\cap E'} = 0$. Donc $\left(f - \displaystyle\sum_{E<S_n} f^E\right) = 0$ sur S_n. Ainsi le problème peut être réduit au cas où chaque f_i appartient à un certain ensemble D^E, $E = F_1 + \cdots + F_n$. Puisque la matrice B est non dégénérée, l'équation $(f_1, \ldots, f_n) = (g_1, \ldots, g_n)B^*$, détermine $g_1, \ldots, g_n$ de manière unique. Par construction, $g_i \in O(i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Proposition 3.1. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des germes de champs de vecteurs de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ de partie linéaire respectives $\sum_{i=1}^n a_{ji} dq_i$, $j \leq n$. Supposons que la matrice $A = (a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$ est non dégénérée, et que $X_1, \ldots, X_n$ ont un rang plus petit que m sur S_m pour tout m. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Il existe des germes de champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_n$ de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ et des germes b_{ji} de fonctions de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $b_{ji}(0) = a_{ji}$ et $Y_i = dq_i + O^2(z)$ et $Y_i \in O(z_i)$, $i \leq n$ et tel que $X_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ji} Y_i$, $j \leq n$. En particulier $X_1, \ldots, X_n$ ont un rang plus petit que m uniquement sur S_m, $m \leq (n-1)$.

(2) Si Z est un germe de champs de vecteurs de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $Z, X_1, \ldots, X_n$ soient linéairement dépendants, alors il existe d'uniques germes $c_1, \ldots, c_n$ de fonctions de classe C^∞ tels que $Z = \sum_{i=1}^n c_i X_i$;

(3) Si Z est un germe de champs de vecteurs de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n},0)$ tel que $\langle Z, X_i\rangle = 0$ pour tout i, alors il existe d'uniques germes $c_1,\dots,c_n$ de fonctions de classe C^∞ et un germe C de matrice de classe C^∞ tels que $C(0) = J$ et $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i C X_i$.

Démonstration. Supposons que (1) est vrai. Montrons que (2) et (3) sont vrai. On peut supposer dans la preuve de (2) comme celle (3) que $X_i = Y_i$, pour tout i. Posons

$$Y_i' = e_i + O^2(z),\; Y_i'' = f_i + O^2(z).$$

On peut écrire $Y_i = Y_i' y_i + Y_i'' x_i$, et définir la matrice M par $M = (Y_1',\dots,Y_n',Y_1'',\dots,Y_n'')$. Comme $M^{-1}Y_i = dq_i$ pour tout i, et $M(0) = I$, alors le système $(M^{-1}Z, dq_1,\dots,dq_n)$ est linéairement dépendant. Donc $dq_i^* J M^{-1} Z = \langle JM^{-1}Z, dq_i\rangle = 0$ pour tout i. Par le Lemme 3.1, il existe d'uniques germes $c_1,\dots,c_n$ de fonction de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n},0)$ tel que $JM^{-1}Z = \sum_{i=1}^{n} c_i J dq_i$. Autrement dit $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$. Pour la preuve de (3), on a comme $\langle Z, X_i\rangle = \langle Z, M dq_i\rangle$ et $\langle Z, M dq\rangle = \rangle M^* Z, dq_i\rangle$, alors $\langle (M^*)Z, dq_i\rangle = 0$. D'après le Lemme 3.1, il existe d'unique germes C^∞ $c_1,\dots,c_n$ sur $(\mathbb{R}^{2n},0)$ tel que $M^*Z = \sum_{i=1}^{n} c_i J dq_i$; autrement dit $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i C X_i$ avec $C = (M^{-1})^* J M^{-1}$.

Supposons que (2) est vrai. Montrons que (1) est vrai. Soit X un germe de champ de vecteurs de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n},0)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1. Désignons par $X^1,\dots,X^n,Y^1,\dots,Y^n$ les composantes de X. Comme X est de rang plus petit que m sur S_m, pour tout $m \le n$, alors d'après le lemme 3.3 il existe un germe de matrice $B = (b_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le 2n}$ tel que $X = (a_1,\dots,a_n)B$. Donc $X = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_{i1} + a_1 y_1 - a_1 y_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i2n} + a_n x_n - a_n x_n)$. Posons $g_j = (\sum_{i=1}^n a_i b_{ij} - a_j y_j)$ et $h_j = (\sum_{i=1}^n a_i b_{ij} - a_j x_j)$, pour $j \le n$. Alors $f = (g_1,\dots,g_n,h_1,\dots,h_n) \in O^2(z)$ et $X = \sum_{i=1}^n a_i dq_i + f$. Supposons que (1) est vrai pour tout $(n-1)$-uplet de germes de champs de vecteurs sur $(\mathbb{R}^{2n},0)$ vérifiant les hypothèses de la proposition3.1. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ n-germes C^∞ de champ de vecteurs sur $(\mathbb{R}^{2n},0)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1. La matrice $A = (a_{ij})$, $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$ étant non dégénérée, alors la sous-matrice
$A' = (a_{ij})_{1\le i\le n-1, 1\le j\le n}$ est non dégénérée. Puisque le système $(X_1,\dots,X_n)$ a un rang plus petit que m sur S_m, alors d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un germe C^∞ de matrice $B = (b_{ij})_{1\le i\le (n-1), 1\le j\le n}$ tel que $B(0) = A'$ et $X_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} Y_i$, $j \le (n-1)$. Soit maintenant E un sous-espace vectoriel de S_{n-1}, alors d'après (2) il existe d'unique germes $c_1^E,\dots,c_{n-1}^E$ tel que

$$X_{n|E} = \sum_{1\le i\le n-1} c_i^E X_{i|E} = \sum_{1\le i\le n} d_i^E Y_{i|E}.$$

Soient E et E' deux sous-espace vectoriel de S_{n-1}. En vertu de l'unicité, $d_i^E = d_i^{E'}$ sur $E \cap E'$. D'après le lemme 3.2 il existe un ensemble unique de germe C^∞ $d_1,\dots,d_{n-1}$ sur $(\mathbb{R}^{2n},0)$ tel que $d_{i|E} = c_i^E$ pour tout sous-espace vectoriel E de S_{n-1} et $X_n = \sum_{1\le i\le n} d_i Y_i$. Donc $\widehat{X_n} = (X_n - \sum_{1\le i\le n} d_i Y_i) = 0$ sur S_{n-1}. En appliquant le Lemme 3.3 aux composantes du champ $\widehat{X_n}$, on obtient le résultat. Pour la dernière partie de (1), on considère le système de vecteurs $(M^{-1}X_1,\dots,M^{-1}X_n)$ où M est la matrice définie ci- dessus. le rang du système est plus petit que m sur S_m si et seulement si $m \le (n-1)$. Et comme M est inversible alors le système de vecteurs $(X_1,\dots,X_n)$ est de rang plus petit que m sur S_m que si $m \le (n-1)$. □

Lemme 3.4. *Soient $V_1,\dots,V_k$ des sous-espaces vectoriels de S_m, et soit $N_1,\dots,N_k$ des germes de sous-variétés de classe C^∞ tels que $T_0 N_i = V_i$. Alors il existe un difféomorphisme de classe C^∞ $\phi : (\mathbb{R}^{2n},0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n},0)$, $D\phi(0) = I$ tel que $\phi(V_i) = N_i$, pour tout i*

Démonstration. Supposons que $N_i \cap N_j = V_i \cap V_j$ pour tout i,j, $N_i = V_i$ pour tout $i \ge 2$. La sous-variété N_1 peut être définie par $N_1 := z_F = \psi(z_E), \psi(0) = 0, D\psi(0) = Id$ où $E = V_1$, $F = V_1^\perp$ et ψ une application différentiable de classe C^∞. Puisque $N_1 \cap V_i = E \cap V_i$, pour tout $i \ge 2$, alors $\psi(z_E) = 0$ pour

$z_E \in E \cap V_i$. Posons maintenant $\phi(z) = (z_E, z_F + \psi(z_E))$. Alors $\phi(V_1) = N_1$ et $\phi_{|V_i} = Id$ pour $i \leq 2$. En procédant par récurrence on montre le résultat général. $\square$

✓Variété singulière

Proposition 3.2. $S_{n-1}(\mathbf{f})$, *est l'unique sous-variété de dimension* $2(n-1)$ *de classe* C^∞ *préservé par les champs hamiltoniens* X_{f_i}, $i \leq n$ *tel que* $T_pS_{n-1}(\mathbf{f}) = S_{n-1}$. *De plus il existe un difféomorphisme* $\phi : (T_pM, 0) \longrightarrow (M, p)$, $D\phi(0) = I$, *de classe* C^∞ *tel que* $\phi^{-1}(S_{n-1}(\mathbf{f})) = S_{n-1}(C_\mu)$.

Démonstration. Comme le problème est local; nous pouvons identifier (M, p) avec $(T_pM, 0)$. Cependant nous ne pouvons pas identifier ω et ω_p. T_pM est donc muni d'une structure symplectique linéaire (ω_p) et d'une structure symplectique non linèaire (ω).Sur (T_pM, ω_p) on introduit un certain système de coordonnées symplectiques $z = (x, y)$ avec en même temps la mêtrique euclidienne correspondante $\langle , \rangle$. On peut supposer que $d_p^2 f_i = d_p^2 q_i$, $i \leq n$. Soit $E = S_{n-1}$ et $F = E^\perp = E_n$. Chaque forme quadratique $d_p^2 f_i$ se décompose comme suit : $d_p^2 f_i = d_p^2 f_{i|E} + d_p^2 f_{i|F}$. En fait pour tout $u, v \in E$; $d_p^2 f_i(u, v) = 0$. Observons que S_m est préservé par le système pour $m \leq n-2$. Considérons la fonction hamiltonienne f^ϵ définie par :

$$f^\epsilon = \epsilon_1 f_1 + \cdots + \epsilon_{n-1} f_{n-1} + f_n. \tag{1}$$

En linéarisant le champ hamiltonien $X^\epsilon = X_{f^\epsilon}$ en p; on obtient : $\pi_E X^\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \pi_E X'_{f_i}(p) + O^2(z)$. Puisque $d_p^2 f_i = d_p^2 q_i$, $i \leq n$, et que $X'_{f_i}(p) = J_p d_p^2 f_i$ alors $\pi_E X^\epsilon = \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i \pi_E J_p dq_i + O^2(z)$ et

$$\langle df_j, X^\epsilon \rangle = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \{f_j, f_i\} = 0, j \leq n. \tag{2}$$

Maintenant considérons l'équation $\pi_F X^\epsilon = 0$. Comme $d_p^2 f_{i|F}$ est non singulier et que $X'_{f_i}(0) = J d_p^2 f_i$, alors $(\pi_F X^\epsilon)'(0)_{|F} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i (\pi_F X'_{f_i})_{|F}$ est non singulier. De plus comme $X^\epsilon(0) = 0$, alors d'après le théorème des fonctions implicites il existe une application différentiable de classe C^∞ $\phi^\epsilon : (E, 0) \longrightarrow (F, 0)$ tel que $\pi_F X^\epsilon(z_E, \phi^\epsilon(z_E)) = 0$, $\phi^\epsilon(0) = 0$. Considérons maintenant l'ensemble $N^\epsilon : z_F = \phi^\epsilon(z_E), z_E \in (E, 0)$ le graphe de l'application différentiable ϕ^ϵ. N^ϵ est une variété différentiable de dimension $2(n-1)$ de classe C^∞ contenant le point p. Puisque $\pi_F X^\epsilon(z_E, \phi^\epsilon(z_E)) = 0$, alors $(\pi_F X^\epsilon(z_E, \phi^\epsilon(z_E)))(0)' = 0$. Ce qui implique que $\pi_F(X^\epsilon)'(0)(z_E, 0) + \pi_F X^\epsilon(0, (\phi^\epsilon)'(0)(z_E)) = 0$. Comme $\pi_F(X^\epsilon)'(0) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \pi_F J d_p^2 f_i$, et $d_p^2 f_{i|E} = 0$; alors $\pi_F(X^\epsilon)'(0)(z_E, 0) = O$; autrement dit $\pi_F(X^\epsilon)'(0)(0, (\phi^\epsilon)'(0)(z_E)) = 0$. $d_p^2 f_{i|F}$ étant non singulier, alors $(\phi^\epsilon)'(0) = 0$. Par conséquent,

$$T_p N^\epsilon = E. \tag{3}$$

Comme S_m est préservé par le système $f_1, \ldots, f_n$ pour $m \leq n-2$. Donc $\pi_F X^\epsilon = 0$ sur S_{n-2}. D'où $\phi^\epsilon = 0$ sur S_{n-2} et

$$S_{n-2} = N^\epsilon \cap E. \tag{4}$$

pour ϵ suffisamment petit. Le fait que S_m est préservé pour $m \leq (n-2)$ entraine également que $X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ a un rang inférieur ou égale à m sur S_m pour tout $m \leq (k-2)$. Cela est également vrai pour les deux systèmes $(df_1, \ldots, df_{n-1})$, $\pi_E df_1, \ldots, \pi_E df_{n-1}$. D'après (4) cela est aussi vrai pour le système $\pi_E df_1 \circ \phi^\epsilon, \ldots, \pi_E df_{n-1} \circ \phi^\epsilon$, où ϕ^ϵ désigne l'application qui a $z_E \longmapsto (z_E, \phi^\epsilon(z_E))$. En linéarisant les champs $(df_i \circ \phi^\epsilon)$; on obtient d'après (3) $\pi_E df_i \circ \phi^\epsilon = \pi_E d_p^2 f_{i|E} + O^2(z_E)$. Et comme $d_p^2 f_i = d_p^2 q_i$, alors $\pi_E df_i \circ \phi^\epsilon = \pi_E dq_i + O^2(z_E), i \leq n-1$. Puisque $\langle X, Y \rangle = \langle \pi_E X, \pi_E Y \rangle + \langle \pi_F X, \pi_F Y \rangle$, pour tout X, Y, donc on obtient par (2) la relation $\langle \pi_E df_i \circ \phi^\epsilon, \pi_E X^\epsilon \phi^\epsilon \rangle = 0, j \leq n-1$. Et d'après la proposition 3.1, il existe sur E des germes de fonctions $c_1^\epsilon, \ldots, c_{n-1}^\epsilon$ et un germe non singulier de matrice C^ϵ tel que $\pi_E X^\epsilon \circ \phi^\epsilon(z_E) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i^\epsilon(z_E) C^\epsilon(z_E) \pi_E df_i \circ \phi^\epsilon$. (différentiable de classe C^∞ par rapport à ϵ). En linéarisant en z_E, on obtient d'après (1) et (3) la relation $(c_1^\epsilon, \ldots, c_{n-1}^\epsilon) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_2)$.

Considérons l'application $c(\epsilon) = (c_1^\epsilon(0), \ldots, c_{n-1}^\epsilon(0))$. L'application $c(\epsilon)$ est différentiable de classe C^∞, $c(0) = 0$ et $d_0 c(\epsilon) = I_{n-1}$. Donc d'après le théorème des fonctions implicites il existe d'unique germes différentiables de classe C^∞ de fonctions $g_1, \ldots, g_{n-1}$ sur $(E, 0)$ tel que $(g_1(0), \ldots, g_{n-1}(0)) = 0$ et que

$c_i^{g(z_E)}(z_E) = 0$ pour tout i. Comme les germes $g_1, \ldots, g_{n-1}$ sont déterminer de manière unique, alors la variété $N : z_F = \phi^{\epsilon}(z_E), \epsilon = g(z_E)$ est l'unique variété contenue dans $S_r(\mathbf{f})$ tel que $T_pN = E$. N est donc préservé le système $(f_1, \ldots, f_n)$. Comme il existe une sous variété différentiable N de dimension $2(n-1)$ contenue dans $S_{n-1}(\mathbf{f})$ tel que $T_pN = S_{n-1}$, Alors d'après le Lemme 3.4, il existe un difféomorphisme de classe C^∞ $\phi : (T_pM, 0) \to (M, p)$ tel que $\phi(S_{n-1}) = N$. Puisque $N \subseteq S_{n-1}(\mathbf{f})$ alors $\phi(S_{n-1}) \subseteq S_{n-1}(\mathbf{f})$. Et de la proposition 3.1 nous en déduisons l'égalité. □

Théorème 3.1 (Lemme de Morse - cas hyperbolique)**.** *Soit (M^{2n}, ω), une variété symplectique, $(f_1, \ldots, f_n)$ un système hamiltonien complètement intégrable et $p \in M^{2n}$ une singularité de type hyperbolique du système. Alors il existe un système de coordonnées locales $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ autour de p et des fonctions ψ_i, $i = 1, \ldots n$ différentiables de classe C^∞ tel que $f_{i|U} = \psi_i(x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$, $i \le n$.*

Démonstration. Observons d'abord que le théorème est équivalent à l'existence d'un difféomorphisme $\phi : (T_pM^{2n}, 0) \to (M^{2n}, p)$, et des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$ différentiables de classe C^∞ tel que $f_i \circ \phi = \psi(q_1, \ldots, q_n)$, $i \le n$ où $\{q_1, \ldots, q_n\}$ est une base standard de $C_\mu = (d_p^2(\mathbf{f}))$. Le problème étant local, alors on peut identifier (M^{2n}, p) et $(T_pM^{2n}, 0)$. Cependant on ne peut pas identifier les formes ω et ω_p. Soit $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ un système de coordonnées symplectiques de (T_pM^{2n}, ω_p) tel que le système $(q_i = x_iy_i)_{1 \le i \le n}$, soit une base standard de $C_\mu = d_p^2\mathbf{f}$. D'après la proposition 3.2, on peut supposer que $S_r(\mathbf{f}) = S_r(d_p^2\mathbf{f})$. Maintenant supposons l'hypothèse suivante que nous justifierons par induction. (P_m) Il existe pour tout $m \le (n-1)$ un difféomorphisme lisse ϕ^m et une fonction ψ^m tel que $\phi^m(S_{n-1}) = S_{n-1}$ et $f_i \circ \phi^m = \psi^m(q_1, \ldots, q_n)$ sur S_m, $i \le n$. Observons que pour $m = (n-1)$ nous avons le théorème. En fait, on peut supposer sans restriction que ϕ^{n-1} est l'identité. Nous voulons construire un champ de vecteurs dépendant du temps Z_t tel que $\langle d(\phi_i + t(h_i - \phi_i)), Z_t\rangle = -(f_i - \phi_i), i \le n$ pour tout $0 \le t \le 1$, où nous avons poser $\phi_i = \psi_i(q_1, \ldots, q_n)$. Soit $\alpha_i = d(\phi_i + t(h_i - \phi_i))$. $df_1, \ldots, df_n$, et $d\phi_i, \ldots, d\phi_i$ ont tous un rang plus petit que m sur S_m, et, par l'hypothèse (P_m), cela est aussi vrai pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Par l'hypothèse de non dégénérescence, la condition de la proposition3.1 est vérifié. D'où, on peut écrire $\alpha_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}Y_j, i \le n$ avec $Y_j \in O(j)$ et $Y_j = dq_j + O^2(z)$, pour tout $j \le n$ et comme $(f_i - \phi_i) = 0$ sur S_{n-1}, donc par le Lemme 3.3, $(f_i - \phi_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j$, $i \le n$ avec $g_j \in O(j), j \le n$. $\alpha_i, b_{ij}, Y_j et g_j$ dépend tous de manière différentiable sur t. Il suffit maintenant de résoudre les équations suivantes : $\langle Y_j, Z_t\rangle = g_j, j \le n$ pour tout $t \in [0, 1]$. $(*)$ La résolution de ces équations se fait comme suit : On pose $Y_i^2 = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni}, 0, \ldots, 0) + O^2(z)$ et $Y_i^1 = (0, \ldots, 0, \delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni}) + O^2(z)$. On a $Y_i = Y_i^1x_i + Y_i^2y_i$ et $g_i = g_i^1x_i + g_i^2y_i$. Désignons par M la matrice $(Y_1^1, \ldots, Y_n^1, Y_1^2, \ldots, Y_n^2)$ et par g le vecteur ligne $(g_1^1, \ldots, g_n^1, g_1^2, \ldots, g_n^2)$. La matrice M est inversible pour tout $t \in [0, 1]$ et de plus $Z_t = M^{-1}g$ est la solution des équations donnés par la relation $(*)$. Maintenant considérons le flot Φ dépendant du temps du champ de vecteurs Z_t. Nous obtenons la relation suivante : $f_i \circ \Phi = \psi(q_1, \ldots, q_n)$ pour tout $i \le n$. Et d'après l'hypothèse de récurrence (P_{n-1}) on obtient la preuve du théorème 3.1. Pour achever la preuve du théorème montrons par récurrence que l'hypothèse (P_m) est vraie. Comme (P_0) est vrai ; on peut supposer (P_{m-1}) est appliqué la récurrence. On peut aussi supposer sans restriction que Φ^{m-1} est l'identité. Si nous considérons un espace singulier E dans S_m. Alors il existe un difféomorphisme local Φ^E et des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$ différentiables de classe C^∞ tel que

$$\Phi^E(S_{n-1}) = S_{n-1}, f_i \circ \Phi^E = \psi^E(q_1, \ldots, q_n). \tag{5}$$

sur E pour tout $i \le n$ et

$$q_i \circ \Phi^{E'} \circ i_{E'} = q \circ i_{E'} \text{ pour tout } E' \subset S_m, E' \ne E, i \le n. \tag{6}$$

Les fonctions Φ^E, et $\psi_1^E(q_1 \ldots, q_n), \ldots, \psi_m^E(q_1, \ldots, q_n)$ différentiables de classe C^∞ sont construis sur E en appliquant le théorème 3.1 aux fonctions $f_i \circ i_E, \ldots,$ et $f_m \circ i_E$. La fonction Φ^E préserve l'espace S_{m-1} et, d'où, S_{n-1}. Comme toutes les fonctions $f_i \circ \Phi^E \circ i_E$ sont constantes sur les fibres de $f_1 \circ \Phi^E \circ i_E, \ldots, f_m \circ \Phi^E \circ i_E$, alors en appliquant le lemme 3.1 ; on obtient les fonctions ψ_i, $m \le i \le n$. De plus par l'hypothèse (P_{m-1}) nous savons qu'il existe des fonctions ψ_i différentiables de classe C^∞ tel que $f_i = \psi_i(q_1, \ldots, q_n)$ sur S_m. La relation 6 implique aussi que $f_i \circ \Phi = f_i$ sur S_{m-1}, et donc $\psi_i^E = \psi_i^{E'}$ sur $E \cap E'$ pour tout E, $E' \subset S_m$, $i \le n$. Maintenant on peut appliquer le lemme 3.2 pour obtenir les fonctions ψ_i' tel que $\psi_i^E \circ i_E = \psi_i'^E$ pour tout $E \subset S_m$, $i \le n$. Ce qui prouve l'hypothèse (P_m) et complète ainsi la preuve du théorème. □

Le théorème 3.1 nous garantie l'existence d'une forme normale des systèmes hamiltoniens complètement intégrables au voisinage d'une singularité de type hyperbolique. Mais cependant cette forme normale n'est pas symplectique ; Autrement dit le système de coordonnées locales donné par le théorème 3.1 n'est pas symplectique. Dans la section qui suit on montre que ce système de coordonnées locales peut être choisis tel qu'il soit symplectique.

4 Forme normale symplectique

Considérons $\mathbb{R}^{2n}$ muni du système de coordonnées $z = (x, y)$ et de la forme symplectique standard $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$. Soit $q_i = x_i y_i$, $i \leq n$.

Lemme 4.1. *Soit $g_1, \ldots, g_n$ des germes de fonctions différentiables de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que*

$$x_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - y_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = x_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - y_i \frac{\partial g_j}{\partial y_i}, \quad i, j \leq n.$$

Alors il existe un unique germe f différentiable de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$, et d'uniques germes $\psi_1, \ldots, \psi_n$ différentiables de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$, tel que $df(J_p dq_i) = g_i - \psi_i(q_1, \ldots, q_n)$, $i \leq n$.

Démonstration. Considérons le flot φ_i^t du champ de vecteurs hamiltonien Jdq_i par rapport à la forme symplectique ω_p, et définissons les applications suivantes :

$$M_i g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi_i^t) dt \text{ et } L_i g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t(g(\varphi_i^t) - M_i g(x, y)) dt$$

pour tout fonction g. On vérifie facilement que $M_i g_i = (M_1 \ldots M_n) g_i$, et $\langle JdMg_i, dq_j \rangle = 0$, $i \leq j \leq n$. Et d'après le lemme 3.1, on obtient $M_i g_i = \psi_1(q_1, \ldots, q_n)$. Pour achever la preuve, il suffit de prendre $f = \sum_{i=0}^{n} M \ldots M_{i-1} L_i g_i$. □

Proposition 4.1. *Soit ω une forme symplectique sur $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ avec $\omega(0) = \omega_p$, tel que $\omega(Jdq_i, Jdq_j) = 0$, $i, j \leq n$. Alors il existe un difféomorphisme $\phi : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ tel que $\phi^* \omega = \omega_p$, et ϕ préserve la fibration lagrangienne pour la forme symplectique ω dont les fibres sont définies par $\bigcap_i q_i = const$.*

Démonstration. Soit α une primitive de la forme symplectique ω. Supposons sans restriction que la partie linéaire $j_1\alpha$ de α est $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} x_i dy_i - y_i dx_i)$. Puisque $\omega(Jdq_i, Jdq_j) = 0$ pour tout $i \leq j \leq n$, alors on obtient $d\alpha(Jdq_i, Jdq_j) = 0$. Et de plus comme $L_X d\alpha = d \circ L_X$, alors $d \circ L_{Jdq_i} d\alpha = 0$. Donc quitte à se restreindre sur une composante connexe de $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ on obtient $i_{Jdq_i} d\alpha + di_{Jdq_i}\alpha = 0, i \leq n$. Ce qui signifie $i_{Jdq_i} d\alpha = -di_{Jdq_i}\alpha$ et $i_{Jdq_j} d\alpha = di_{Jdq_j}\alpha$. C'est-à-dire $i_{Jdq_j} d\alpha(Jdq_i) = di_{Jdq_j}\alpha(Jdq_i)$. La forme symplectique $\omega(0)$ étant égale à ω_p, alors on a $\omega_p(Jdq_j, Jdq_i) = 0$. Et par suite on obtient $i_{Jdq_j} dj_1\alpha(Jdq_i) = di_{Jdq_j} j_1\alpha(J_p dq_i)$. Maintenant pour achever la preuve, il nous faut d'une fonction f différentiable de classe C^∞ tel que $df(J_p dq_i) = (\alpha - j_1\alpha)(J_p dq_i)$, pour tout i. D'après le lemme 4.1 une telle fonction existe si et seulement si $(\alpha - j_1\alpha)(J_p dq_i) = 0$ pour tout i. Nous allons faire la preuve sous l'hypothèse que f existe, laquelle nous démontrons dans la suite. Considérons l'équation $(\omega_p + s(\omega(0) - \omega_p))(Z_s) = -(\alpha - J_1\alpha - df)$. Il définit un champ de vecteur Z_s non autonome pour $0 \leq s \leq 1$, dont le flot de chaque champ Z_s tire en arrière la forme ω à $\omega(0)$. Cependant, comme $(\omega(0) + s(\omega - \omega(0)))(Z_s, J_p dq_i) = -(\alpha - j_1\alpha - df)(J_p dq_i) = 0$ pour tout i, et que la fibration est lagrangien pour ω et $\omega(0)$; il s'en suit que le champs Z_s est tangentiel aux fibres de la fibration lagrangienne. Le flot des champs de vecteurs Z_s préserve donc la fibration lagrangienne. Pour terminer la preuve nous avons tout juste besoin de montrer l'existence de la fonction f. Soit φ^t, $t \in \mathbf{T}^n$, le groupe d'action engendré par le système hamiltonien $q_1, \ldots, q_n$, et soit M l'opérateur qui prend les mêmes valeurs sous l'action du groupe. Notons que α peut être choisit tel que α et $M\alpha$ aient la même partie linéaire, et notons aussi que M commute avec la différentielle extérieur d. Soit Z_s l'unique solution de l'équation $i_{Z_s}(\omega_p - s(M\omega - \omega_p)) = -M(\alpha - j_1\alpha)$. Pour tout $s \in [0, 1]$ le flot ϕ du champ Z_s tire en arrière $M\omega$ en ω_p, et comme il commute avec φ^t car $(\omega_p - s(M\omega - \omega_p))(Z_s, dq_i) = -M(\alpha - j_1\alpha)(dq_i) = 0$ pour tout

$i \leq n$, et $s \in [0, 1]$; Alors on obtient $M\phi^*\omega = \phi^* M\omega = \omega_p$. En Supposant que $M\omega = \omega(0)$; on obtient : $dM(\alpha + j_1\alpha) = d(M\alpha + j_1\alpha) = 0$. D'où $(M\alpha + j_1\alpha) = 0$ et fermée, donc localement exacte. Quitte à se restreindre sur un ouvert U il existe une fonction f tel que $(M\alpha + j_1\alpha) = df$. Puisque $df = Mdf = dMf$, alors on peut supposer que $f = Mf$ (quitte à se restreindre sur une composante connexe de U) ; d'où on obtient $df(J_p dq_i) = 0$ pour tout i, et $M((\alpha - j_1\alpha)(J_p dq_i)) = M(\alpha - j_1\alpha)(J_1 dq_i) = df(J_p dq_i) = 0$, $i \leq n$. Ce qui prouve la proposition. □

Théorème 4.1. *Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ un système hamiltonien complètement intégrable sur (M^{2n}, ω), $p \in M^{2n}$ une singularité non dégénérée de type hyperbolique. Alors il existe un système de coordonnées locales symplectiques $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ autour de p et des fonctions lisses ψ_i, $i = 1, \ldots n$ tel que*

$$f_i \mid U = \psi_i(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n), i \leq n.$$

Démonstration. La preuve se déduit immédiatement du Théorème 3.1 et de la Proposition 4.1. En fait comme la fibration $\cap h_i = const$ est lagrangienne pour la forme ω et que $h_i = \psi_i(q_1, \ldots, q_n)$, alors cette fibration est précisément $\cap q_i = const$. Cela prouve le théorème. □

Références

[1] Arnold V. I. and Avez A. : *Théorie ergodique des systèmes dynamiques,* Gauthier-Villars, Paris (1967).

[2] Arnold V.I. : *mathematic methods of classical mechanics,* Springer (1978).

[3] Chaperon M. : *Normalisation of the smooth focus-focus : A simple proof,* Acta Math. Vietnam. 38(2013) $n°1$, $3 - 9$.

[4] Chaperon M. : *Quelques outils de la théorie des actions différentielles,* astérisque 107-108,259-275 (1983).

[5] Dufour J. and Molino.P. : *coordonnées actions-angles avec singularités,* Preprint, Montpellier (1984).

[6] Eliasson L. H. : *Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrabls,* Commenntarii mathematici Helvetici , Basel, 1929, $4 - 35$.

[7] Eliasson L. H. : *hamiltonian systems with Poisson commuting integrabls,* PhD. Thesis, 1984.

[8] Liapounof A. M. : *Probleme général de la stabilité du mouvement,* Annals of mathematicstudies 17, Princeton University (1947).

[9] Liouville J. : *Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique,* présentée au bureau des longitudes le 29 juin 1853, Journal de Mathématiques pures et appliquées 20 (1855) $137 - 138$.

[10] Marle C. M. : *Modèle d'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété symplectique,* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 43 (2) (1985) $227 - 251$.

[11] Mineur H. : *Sur les systèmes mécaniques admettant n-intégrales premières uniformes et l'extension à ces systèmes de la méthode de quantification de Sommerfeld,* C. R. Acad. Sci., Paris 200 (1935) $1571 - 1573$.

[12] Mineur H. : *Sur les systèmes mécaniques dans lesquels figurent des paramètres fonctions du temps. Étude des systèmes admettant n intégrales premières uniformes en involution. Extension à ces systèmes des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld,* Journal de l'école Polytechnique, Série III, 143ème année (1937) $173 - 191$, and $237 - 270$.

[13] Miranda E. : *On symplectic linearization of singular lagrangian foliations* Department of algebre and geometrie University of Barcelone Juny 2003.

[14] Moser K. : *Periodic orbits near an equilibrium and a theorem of Weinstein,* Communication pur and applied mathemati 29, 727-747 (1976).

[15] Ngoc S. V. and Wacheux C. : *Smooth normal form for integrable hamiltonian systems near a focus-focus singularity* arXiv :1103.3282v1 [math.SG] 16 Mar 2011.

[16] Siegel M. J. : *lecture on celestial mechanics,* Springer(1971).

[17] Williamson J. : *On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems.* American Journal of Mathematics, 58(1) :$141 - 163$, 1936.